1

解答解説のページへ

実数α，βについて, x, yは 2 つの等式

$$x+y=\alpha\beta+\alpha+\beta-1,\quad 2x+3y=3\alpha\beta+2\alpha+2\beta-3$$

を満たすものとする。次の問いに答えよ。

(1) $\alpha+\beta$と$\alpha\beta$をx, yで表せ。

(2) tの 2 次方程式$t^2-(\alpha+\beta)t+\alpha\beta=0$が実数解をもつ条件を$x, y$で表せ。

(3) α，βが条件$-1\leqq\alpha\leqq1$，$-1\leqq\beta\leqq1$を満たすとき，点$(x,\ y)$の存在範囲を座標平面に図示せよ。

2

解答解説のページへ

不等式 $y \leqq -(x-1)^2$ の表す領域を A_1，不等式 $y \leqq -(x+1)^2$ の表す領域を A_2 とする。A_1 と A_2 の和集合 $A_1 \cup A_2$ を A とする。また，不等式 $y \geqq (x-a)^2+b$ の表す領域を B とする。次の問いに答えよ。

(1) $a=0$，$b=-1$ とするとき, A と B の共通部分 $A \cap B$ の面積を求めよ。

(2) A_1 と B の共通部分 $A_1 \cap B$ が空集合でないための条件を a, b で表せ。

(3) A と B の共通部分 $A \cap B$ が空集合でないとき点 $(a,\ b)$ の存在範囲を座標平面に図示せよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

複素数平面上で，点 0 を中心とする半径 1 の円を C，点 1 を中心とする半径 1 の円を C' とする。複素数 z の表す点は C 上にあり，複素数 w の表す点は C' 上にある。z の偏角を θ とし，$w-1$ の偏角は 2θ とする。ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。次の問いに答えよ。

(1) w を θ を用いて表せ。

(2) w の実部が z の実部より小さくなる θ の範囲を求めよ。

(3) $|w-z| = \sqrt{3}+1$ を満たす θ の値を求めよ。

$\boxed{1}$

問題のページへ

(1)　条件から，$x+y=\alpha\beta+\alpha+\beta-1$，$2x+3y=3\alpha\beta+2\alpha+2\beta-3$ なので，

$$\alpha\beta+(\alpha+\beta)=x+y+1\cdots\cdots\cdots①,\ 3\alpha\beta+2(\alpha+\beta)=2x+3y+3\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\alpha\beta=2x+3y+3-2(x+y+1)=y+1$

$$\alpha+\beta=x+y+1-(y+1)=x$$

(2)　2 次方程式 $t^2-(\alpha+\beta)t+\alpha\beta=0\cdots\cdots③$が実数解をもつ条件は，

$$D=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\geqq 0$$

(1)より，$x^2-4y-4\geqq 0$，$y\leqq\dfrac{1}{4}x^2-1\cdots\cdots\cdots④$

(3)　③は $(t-\alpha)(t-\beta)=0$ と変形でき，その解は $t=\alpha$，β である。

すると，条件 $-1\leqq\alpha\leqq 1$，$-1\leqq\beta\leqq 1$ は，③の 2 つの解がともに $-1\leqq t\leqq 1$ にあることに等しい。

ここで，$f(t)=t^2-(\alpha+\beta)t+\alpha\beta=t^2-xt+y+1$ とおくと，④の条件のもとで，

$$-1\leqq\frac{x}{2}\leqq 1,\ f(1)=2-x+y\geqq 0,\ f(-1)=2+x+y\geqq 0$$

よって，$-2\leqq x\leqq 2$，$y\geqq x-2$，$y\geqq -x-2$

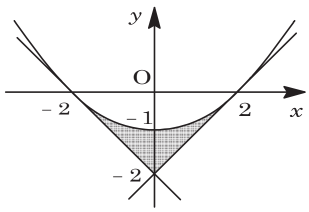
さて，④の境界線 $y=\dfrac{1}{4}x^2-1$ と $y=x-2$ の共有点は，

$$\frac{1}{4}x^2-1=x-2,\ \frac{1}{4}(x-2)^2=0$$

よって，放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2-1$ と直線 $y=x-2$ は，点 $(2,\ 0)$ で接する。

同様に，放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2-1$ と直線 $y=-x-2$ は，点 $(-2,\ 0)$ で接する。

以上より，求める点 $(x,\ y)$ の存在範囲は，右図の網点部となる。なお，境界は領域に含む。



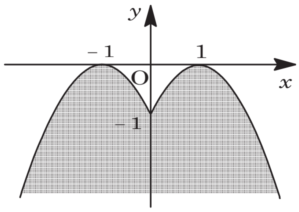
［解 説］

2 次方程式の解の配置の問題です。基本に従って，計算を進めることが重要です。

2

問題のページへ

(1)　$A_1 : y \leqq -(x-1)^2$，$A_2 : y \leqq -(x+1)^2$ に対し，集合 $A = A_1 \cup A_2$ の表す領域は，右図の網点部となる。



さて，$B : y \geqq (x-a)^2 + b$ に対し，$a = 0$，$b = -1$ のときは，$B : y \geqq x^2 - 1$ である。

よって，$A \cap B$ の表す領域は，y 軸に関して対称となり，その面積 S は，

$$S = 2\int_0^1 \{ -(x-1)^2 - (x^2 - 1) \} dx = 2\int_0^1 (-2x^2 + 2x)\, dx = \frac{2}{3}$$

(2)　$A_1 \cap B \neq \phi$ であるとき，放物線 $y = -(x-1)^2$ と $y = (x-a)^2 + b$ は共有点をもち，

$$-(x-1)^2 = (x-a)^2 + b,\ \ 2x^2 - (2a+2)x + a^2 + b + 1 = 0$$

よって，$D/4 = (a+1)^2 - 2(a^2 + b + 1) \geqq 0$

$$2b \leqq -a^2 + 2a - 1,\ \ b \leqq -\frac{1}{2}(a-1)^2 \cdots\cdots\cdots①$$

(3)　$A \cap B = (A_1 \cup A_2) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$ より，$A \cap B \neq \phi$ であることは，$A_1 \cap B \neq \phi$ または $A_2 \cap B \neq \phi$ であることと同値である。

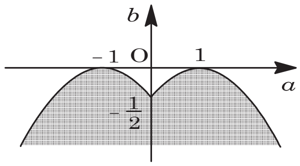
ここで，$A_2 \cap B \neq \phi$ という条件は, (2)と同様にして,

$$-(x+1)^2 = (x-a)^2 + b,\ \ 2x^2 - (2a-2)x + a^2 + b + 1 = 0$$

よって，$D/4 = (a-1)^2 - 2(a^2 + b + 1) \geqq 0$

$$2b \leqq -a^2 - 2a - 1,\ \ b \leqq -\frac{1}{2}(a+1)^2 \cdots\cdots\cdots②$$

以上より，$A \cap B \neq \phi$ であるとき①または②が成立し，これを図示すると，右図の網点部となる。なお，境界は領域に含む。

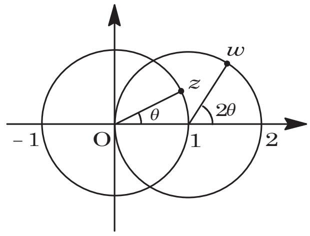


［解 説］

集合と領域の融合問題です。(3)の題意は，少し把握しづらいですが，その点は，(2)の誘導によって少し緩和されています。

$\boxed{3}$

問題のページへ



(1)　条件より，$w-1=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$ なので，

$$w=1+\cos 2\theta+i\sin 2\theta$$

(2)　$z=\cos\theta+i\sin\theta$ と表せるので，w の実部が z の実部より小さくなる条件は，

$$1+\cos 2\theta<\cos\theta\ ,\ \ 2\cos^2\theta-\cos\theta<0$$

$$\cos\theta(2\cos\theta-1)<0\ ,\ \ 0<\cos\theta<\frac{1}{2}$$

よって，$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ から，$60^\circ<\theta<90^\circ$ である。

(3)　$w=1+\cos 2\theta+i\sin 2\theta$，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ より，

$$\begin{aligned}|w-z|&=|1+\cos 2\theta-\cos\theta+i(\sin 2\theta-\sin\theta)|\\&=|\cos\theta(2\cos\theta-1)+i\sin\theta(2\cos\theta-1)|\\&=|2\cos\theta-1||\cos\theta+i\sin\theta|=|2\cos\theta-1|\end{aligned}$$

すると，条件より，$|2\cos\theta-1|=\sqrt{3}+1$

(i)　$2\cos\theta-1=\sqrt{3}+1$ のとき

$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}+2}{2}>1$ となり，この式を満たす θ は存在しない。

(ii)　$2\cos\theta-1=-\sqrt{3}-1$ のとき

$\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となり，$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ から，$\theta=150^\circ$ である。

［解 説］

複素数についての基本問題です。三角関数の計算力がものを言います。