1

解答解説のページへ

3 点 $\mathrm{A}(6,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 6,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 6)$ の定める平面を α とする。原点 O を通り平面 α に直交する直線と α との交点を H とする。また，線分 HO 上の点で，H からの距離が t となる点を P_t とする。ただし，P_t の動く範囲から両端点 H，O は除くとする。次の問いに答えよ。

(1) 点 H の座標と，t の動く範囲を求めよ。

(2) 平面 α 上にあり，P_t からの距離が OH となる点が作る円を S_t とする。S_t とその内部を底面とし，P_t を頂点とする円錐の体積を $f(t)$ とする。このとき $f(t)$ を求めよ。

(3) (2)の $f(t)$ の最大値を求めよ。

2

解答解説のページへ

定数 a は $0<a<1$ を満たすとする。行列 $P=\begin{pmatrix}1-a & a\\ a & 1-a\end{pmatrix}$ について次の問いに答えよ。

(1)　P の 2 乗は $P^2=\begin{pmatrix}1-b & b\\ b & 1-b\end{pmatrix}$ という形で表されることを示せ。

(2)　n が自然数のとき, P の n 乗は $P^n=\begin{pmatrix}1-p_n & p_n\\ p_n & 1-p_n\end{pmatrix}$ という形で表されることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3)　(2)の p_n について, 数列 $\{p_n\}$ の一般項と $\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

関数 $f(x)$ を $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき $f(x) = \sin x$ とおき，$x < 0$ または $\pi < x$ のとき $f(x) = 0$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　2 つの定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \{f(x)\}^2 dx$ と $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left\{f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 dx$ の値を求めよ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x) f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx$ の値を求めよ。

(3)　$a > 0$ について，$T(a) = \displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \left\{2af(x) + \frac{1}{a} f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 dx$ とおく。$T(a)$ の最小値とそれを与える a の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

1 個のさいころを振る試行をくり返す。n 回の試行で少なくとも 1 回は 1 の目が出る確率を a_n とする。$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ について，k 回目の試行ではじめて 1 の目が出る確率を b_k とする。次の問いに答えよ。

(1)　a_n を n を用いて表せ。

(2)　$M_n=\dfrac{1}{a_n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kb_k$ とする。M_n を n を用いて表せ。

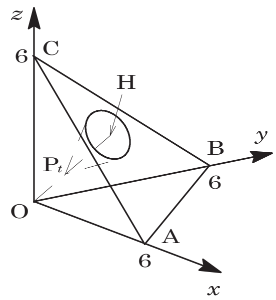
(3)　(2)の M_n について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}M_n$ を求めよ。ただし，$|r|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ が成り立つことを用いてもよい。

1

問題のページへ

(1)　3 点 A$(6,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 6,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 6)$ の定める平面 α の方程式は，

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{6}+\frac{z}{6}=1,\ x+y+z=6$$



すると，平面 α の法線ベクトルは $\vec{n}=(1,\ 1,\ 1)$ となるので，k を定数として，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{n}=k(1,\ 1,\ 1)$ から，H$(k,\ k,\ k)$ と表せ，

$$k+k+k=6,\ k=2$$

よって，H$(2,\ 2,\ 2)$ となり，$\mathrm{OH}=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}$ より，

$$0<t<2\sqrt{3}$$

(2)　P$_t$ を頂点とする円錐は母線 $\mathrm{OH}=2\sqrt{3}$，高さ $\mathrm{P}_t\mathrm{H}=t$ から，円 S_t の半径は，

$$\sqrt{(2\sqrt{3})^2-t^2}=\sqrt{12-t^2}$$

よって，円錐の体積 $f(t)$ は，

$$f(t)=\frac{1}{3}\pi(12-t^2)t=\frac{1}{3}\pi(-t^3+12t)$$

(3)　(2)より，$f'(t)=\frac{1}{3}\pi(-3t^2+12)$

$$=-\pi(t+2)(t-2)$$

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	$2\sqrt{3}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗		↘	

すると，右表より，$f(t)$ の最大値は，

$$f(2)=\frac{1}{3}\pi(-8+24)=\frac{16}{3}\pi$$

［解 説］

切片を利用して平面の方程式を記述しました。詳細はピンポイントレクチャーを参照してください。

2

問題のページへ

(1) $P=\begin{pmatrix}1-a & a\\ a & 1-a\end{pmatrix}$に対して,

$$P^2=\begin{pmatrix}1-a & a\\ a & 1-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-a & a\\ a & 1-a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2a+2a^2 & 2a-2a^2\\ 2a-2a^2 & 1-2a+2a^2\end{pmatrix}$$

ここで, $b=2a-2a^2$とおくと, $P^2=\begin{pmatrix}1-b & b\\ b & 1-b\end{pmatrix}$となる。

(2) $P^n=\begin{pmatrix}1-p_n & p_n\\ p_n & 1-p_n\end{pmatrix}$と表されることを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$のとき　$p_1=a$とおくと成立する。

(ii) $n=k$のとき　$P^k=\begin{pmatrix}1-p_k & p_k\\ p_k & 1-p_k\end{pmatrix}$であると仮定する。

$$\begin{aligned}P^{k+1}&=\begin{pmatrix}1-p_k & p_k\\ p_k & 1-p_k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-a & a\\ a & 1-a\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1-a-p_k+2ap_k & a+p_k-2ap_k\\ a+p_k-2ap_k & 1-a-p_k+2ap_k\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1-a-(1-2a)p_k & a+(1-2a)p_k\\ a+(1-2a)p_k & 1-a-(1-2a)p_k\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ここで, $p_{k+1}=a+(1-2a)p_k$とおくと, $P^{k+1}=\begin{pmatrix}1-p_{k+1} & p_{k+1}\\ p_{k+1} & 1-p_{k+1}\end{pmatrix}$となる。

(i)(ii)より, $P^n=\begin{pmatrix}1-p_n & p_n\\ p_n & 1-p_n\end{pmatrix}$と表される。

(3) (2)より, $p_{n+1}=a+(1-2a)p_n$となり,

$$p_{n+1}-\frac{1}{2}=(1-2a)\left(p_n-\frac{1}{2}\right)$$

よって, $p_n-\frac{1}{2}=\left(p_1-\frac{1}{2}\right)(1-2a)^{n-1}$, $p_n=\frac{1}{2}+\left(a-\frac{1}{2}\right)(1-2a)^{n-1}$

ここで, $0<a<1$から$-1<1-2a<1$となり, $n\to\infty$のとき$(1-2a)^n\to 0$から,

$$\lim_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{2}$$

［解 説］

行列のn乗についての平易な頻出題です。誘導の意味も一目瞭然です。

3

問題のページへ

(1)　$0 \leqq x \leqq \pi$ のとき $f(x)=\sin x$, $x<0$ または $\pi<x$ のとき $f(x)=0$ より,

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\{f(x)\}^2dx=\int_0^{\pi}\{f(x)\}^2dx+\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\{f(x)\}^2dx=\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\Big[x-\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$

また，$0 \leqq x-\dfrac{\pi}{2} \leqq \pi\ \left(\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\pi\right)$ のとき $f\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos x$ となり，$x-\dfrac{\pi}{2}<0$ または $\pi<x-\dfrac{\pi}{2}\ \left(x<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi<x\right)$ のとき $f\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ である。

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\left\{f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\left\{f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\cos^2 x\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big[x+\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}=\frac{\pi}{2}$$

(2)　$I=\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi}f(x)f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx$ とおくと,

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx+\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}f(x)f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\sin x\cos x\,dx=-\Big[\frac{1}{2}\sin^2 x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{1}{2}$$

(3)　$T(a)=4a^2\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\{f(x)\}^2dx+4\int_0^{\frac{3}{2}\pi}f(x)f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx+\frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\left\{f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2dx$

(1)(2)より，$T(a)=4a^2\cdot\dfrac{\pi}{2}+4\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=2\pi a^2+\dfrac{\pi}{2a^2}+2$

$a>0$ から，相加平均と相乗平均の関係より,

$$T(a)\geqq 2\sqrt{2\pi a^2\cdot\frac{\pi}{2a^2}}+2=2\pi+2$$

等号成立は，$2\pi a^2=\dfrac{\pi}{2a^2}$ すなわち $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときである。

以上より，$a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$T(a)$ は最小値 $2\pi+2$ をとる。

［解 説］

積分区間を分けて丁寧に計算すれば OK です。思考を整理するために，グラフを書くのも 1 つの手です。

4

問題のページへ

(1)　n 回さいころを振ったとき，1 の目が出ない確率は $\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$ より，少なくとも 1 回は 1 の目が出る確率 a_n は,

$$a_n = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

(2)　k 回目に振ったとき，はじめて 1 の目が出る確率を b_k は，$b_k = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1}$ である。

ここで，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kb_k = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$ とおくと,

$$6S_n - 5S_n = \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k} = 1+\frac{5}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\cdots+\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - n\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

よって，$S_n = 6\left\{1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^n\right\} - n\left(\dfrac{5}{6}\right)^n = 6-(n+6)\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$ となり,

$$M_n = \frac{6-(n+6)\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n} = 6 - \frac{n\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}$$

(3)　条件より, $n\to\infty$ のとき $n\left(\dfrac{5}{6}\right)^n \to 0$ なので, (2)から,

$$\lim_{n\to\infty} M_n = 6$$

［解 説］

有名な(等差)×(等比)タイプの数列の和 S_n で，期待値を計算していることがわかります。