1

解答解説のページへ

放物線 $y=-x^2+2x$ を H_1 ，また放物線 $y=x^2$ を H_2 で表す。H_1 上の点 $\mathrm{P}(a,\ -a^2+2a)$ における H_1 の接線を l とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 接線 l の方程式を求めよ。また，a の値に関係なく，l は H_2 と異なる 2 点で交わることを示せ。

(2) 接線 l と放物線 H_2 の異なる 2 つの交点を結ぶ線分の中点を Q とする。点 P が H_1 上を動くとき，点 Q の軌跡 C の方程式を求めよ。

(3) (2)の軌跡 C と放物線 H_1 および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

2

解答解説のページへ

O を原点とする座標平面上に 2 点 A$(1,\ 1)$，B$(3,\ -1)$ がある。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

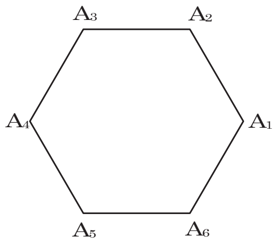
(2) t が $0\leqq t\leqq 2$ を満たしながら変化するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}+t\vec{b}$ で定められる点 P の動く範囲を図示せよ。

(3) s，t が $1\leqq s\leqq 3$，$0\leqq t\leqq 2$ を満たしながら変化するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ で定められる点 Q の動く範囲の面積を求めよ。

3

解答解説のページへ

図のように頂点が A_1 から A_6 である 1 辺の長さが 2 の正六角形がある。さいころを投げて出た目 k と頂点 A_k を対応させる。さいころを 3 回投げて出た目がすべて異なるときには，対応する頂点を結んで三角形ができ，それ以外の場合には線分か点ができる。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　$\triangle A_1A_2A_3$，$\triangle A_1A_3A_4$，$\triangle A_1A_3A_5$ の面積をそれぞれ求めよ。

(2)　さいころを 3 回投げたとき，三角形ができない確率を求めよ。

(3)　さいころを 3 回投げたとき，$\triangle A_1A_2A_3$ と合同な三角形ができる確率を求めよ。

(4)　さいころを 3 回投げたときにできる図形の面積の期待値を求めよ。ただし，線分と点の面積は 0 とする。

1

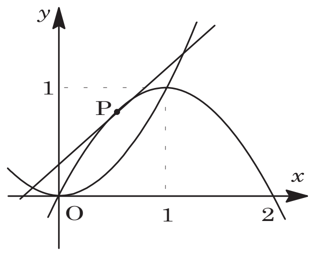
問題のページへ

(1)　$H_1: y=-x^2+2x$ より，$y'=-2x+2$

点 $\mathrm{P}(a,\ -a^2+2a)$ における接線 l の方程式は，

$$y-(-a^2+2a)=(-2a+2)(x-a)$$

$$y=(-2a+2)x+a^2$$



ここで，l と $H_2: y=x^2$ との共有点は，

$$x^2=(-2a+2)x+a^2$$

$$x^2+2(a-1)x-a^2=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

①の判別式 D は，$D/4=(a-1)^2+a^2>0$

よって，a の値と関係なく，l は H_2 と異なる 2 点で交わる。

(2)　①の 2 つの解を $x=\alpha,\ \beta$ とおくと，2 交点は $(\alpha,\ \alpha^2)$，$(\beta,\ \beta^2)$ と表せ，

$$\alpha+\beta=-2(a-1),\ \alpha\beta=-a^2$$

このとき，2 交点の中点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2},\ y=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$$

すると，$x=-(a-1) \cdots\cdots ②$

$$y=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{2}=\frac{4(a-1)^2+2a^2}{2}=3a^2-4a+2 \cdots\cdots\cdots ③$$

②より $a=-x+1$ となり，③に代入すると，点 Q の軌跡 C の方程式は，

$$y=3(-x+1)^2-4(-x+1)+2,\ y=3x^2-2x+1$$

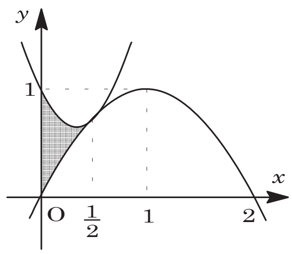
(3)　C と H_1 の共有点は，$3x^2-2x+1=-x^2+2x$

$$4x^2-4x+1=0,\ (2x-1)^2=0,\ x=\frac{1}{2}$$

C と H_1 および y 軸で囲まれた図形の面積 S は，

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}}\{(3x^2-2x+1)-(-x^2+2x)\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)^2dx=\frac{1}{6}\Big[(2x-1)^3\Big]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}$$



［解 説］

H_1，H_2，C という 3 種類の放物線，しかも H_1 の接線 l が関連しているため，混乱しがちです。題意を取り違えないことが重要です。

2

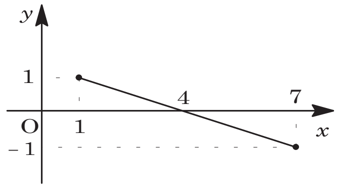
問題のページへ

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}=(1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}=(3,\ -1)$より，$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角$\theta$に対し，

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{3-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}+t\vec{b}\ (0\leqq t\leqq 2)$より，点 P は点 A を通り，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$と平行な線分上を動く。

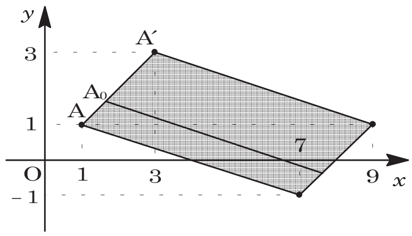
ここで，$t=0$のとき$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}=(1,\ 1)$，$t=2$のとき$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}+2\vec{b}=(7,\ -1)$より，点 P の動く範囲は右図の線分となる。



(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\vec{a}+t\vec{b}$において，$s$，$t$ の値は独立に変化させることができるので，s の値をいったん固定し，$s=s_0\ (1\leqq s_0\leqq 3)$とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA_0}}=s_0\vec{a}$とおく。

すると，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA_0}}+t\vec{b}\ (0\leqq t\leqq 2)$から，点 A が点$\mathrm{A_0}$に一致するように(2)の線分を平行移動した線分上を点 Q は動く。

ここで，$s=s_0$の値を $1\leqq s\leqq 3$ で動かすとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=3\vec{a}=(3,\ 3)$とおくと，点$\mathrm{A_0}$は線分$\mathrm{AA'}$上を動く。それに伴い，上記の線分は平行移動し，点 Q は右図の平行四辺形の内部または辺上を動く。



この平行四辺形の面積Sは，

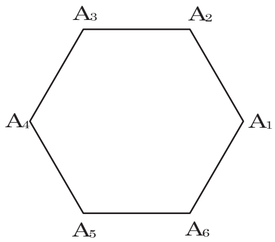
$$S=2|\vec{a}|\cdot 2|\vec{b}|\sin\theta=2\sqrt{2}\times 2\sqrt{10}\times\sqrt{1-\frac{1}{5}}=16$$

[解 説]

(2)，(3)とも，成分を用いて処理することができますが，出題者の意図は上記のような解法でしょう。

3

問題のページへ



(1)　まず，$\angle A_1A_2A_3 = 120°$ より，

$$\triangle A_1A_2A_3 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sin 120° = \sqrt{3}$$

$A_1A_3 = 2\times 2\cos 30° = 2\sqrt{3}$，$\angle A_1A_3A_4 = 90°$ から，

$$\triangle A_1A_3A_4 = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2 = 2\sqrt{3}$$

また，$\triangle A_1A_3A_5$ は正三角形なので，

$$\triangle A_1A_3A_5 = \frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{3})^2\sin 60° = 3\sqrt{3}$$

(2)　さいころを 3 回投げたとき，三角形ができるのは，出た目がすべて異なる場合である。すると，この確率は，

$$\frac{{}_6P_3}{6^3} = \frac{5}{9}$$

これより，三角形ができない確率は，$1-\frac{5}{9} = \frac{4}{9}$ である。

(3)　$\triangle A_1A_2A_3$ と合同な三角形は 6 個存在し，それぞれの三角形について，目の出る順序が $3!$ 通りずつある。

よって，この確率は，$\dfrac{6\times 3!}{6^3} = \dfrac{1}{6}$ である。

(4)　(3)と同様すると，$\triangle A_1A_3A_4$ と合同な直角三角形は $4\times 3 = 12$ 個存在し，それぞれの三角形について，目の出る順序が $3!$ 通りずつある。

よって，この確率は，$\dfrac{12\times 3!}{6^3} = \dfrac{1}{3}$ である。

また，$\triangle A_1A_3A_5$ と合同な正三角形は 2 個存在し，それぞれの三角形について，目の出る順序が $3!$ 通りずつある。

よって，この確率は，$\dfrac{2\times 3!}{6^3} = \dfrac{1}{18}$ である。

さいころを 3 回投げたとき，この 3 種類の三角形以外は図形の面積が 0 なので，図形の面積の期待値は，

$$\sqrt{3}\times\frac{1}{6} + 2\sqrt{3}\times\frac{1}{3} + 3\sqrt{3}\times\frac{1}{18} = \sqrt{3}$$

［解　説］

有名な問題です。期待値の計算への誘導も丁寧です。