1　解答解説のページへ

関数 $f(x)=-x^2+6x+2|x-3|-6$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=ax$ が 4 点を共有するような a の値の範囲を求めよ。

(3)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=\dfrac{3}{5}x$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

2

解答解説のページへ

点 O を原点とする xy 平面上に 3 点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{R}(\sin\theta,\ -\cos\theta)$ をとる。角 θ は $15^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ$ の範囲にあるとし，△OPQ と△OPR の面積をそれぞれ S と T とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\theta < \alpha < \theta + 90^\circ$ を満たす角 α に対して点 $\mathrm{A}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ をとる。△OPA の面積と線分 QR の長さの積が $S+T$ に等しくなるとき，α を θ を用いて表せ。

(2) θ が $15^\circ \leqq \theta \leqq 45^\circ$ を満たしながら変化するとき，$T-S$ のとりうる値の範囲を求め，$T-S$ が最大値をとるときの θ の値を求めよ。

(3) θ を(2)で求めた値とする。このときの S と T の値を求めよ。また，点 $\mathrm{Q}'(-\cos\theta,\ -\sin\theta)$ に対して，△PQQ$'$ の面積を求めよ。

3

解答解説のページへ

xy 平面上で不等式 $y \geqq x^2 - 7x + \dfrac{49}{4}$ の表す領域を D とするとき，次の問いに答えよ。

(1) さいころを続けて 2 回投げたとき，1 回目に出た目を m，2 回目に出た目を n とする。このとき，点 $(m,\ n)$ が D に属する確率を求めよ。

(2) さいころを 1 回投げたときに出た目を k とする。この k に対して 2 点 $\mathrm{P}(k,\ k+1)$，$\mathrm{Q}(k+1,\ k-1)$ が両方とも D に属するとき，P と Q を通る直線と放物線 $y = x^2 - 7x + \dfrac{49}{4}$ とで囲まれた部分の面積を得点とする。また，P，Q の少なくとも一方が D に属さないときの得点は 0 とする。こうして定まる得点の期待値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$f(x)=-x^2+6x+2|x-3|-6$ に対して，

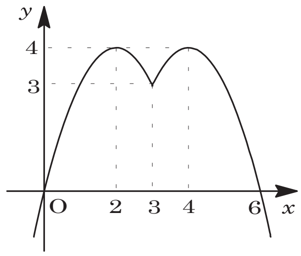
(i)　$x\geqq 3$ のとき　$f(x)=-x^2+6x+2(x-3)-6$

$=-x^2+8x-12$

$=-(x-4)^2+4$

(ii)　$x<3$ のとき　$f(x)=-x^2+6x-2(x-3)-6$

$=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$



(i)(ii)より，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。

(2)　曲線 $y=-x^2+8x-12$ と直線 $y=ax$ が接するとき，

$-x^2+8x-12=ax$，$x^2-(a-8)x+12=0$

この方程式が重解をもつことより，$D=(a-8)^2-48=0$，$a=8\pm 4\sqrt{3}$

右図より，曲線 $y=f(x)$ に接するのは，$a=8-4\sqrt{3}$ のときである。

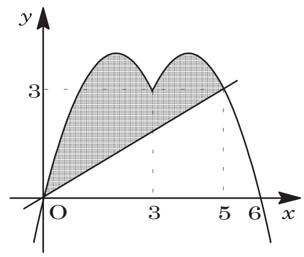
また，直線 $y=ax$ が点 $(3,\ 3)$ を通るとき $a=1$ なので，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=ax$ が 4 点を共有する a の値の範囲は，右上図から，

$1<a<8-4\sqrt{3}$

(3)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=\dfrac{3}{5}x$ の交点は，

$-x^2+8x-12=\dfrac{3}{5}x$，$5x^2-37x+60=0$

$(5x-12)(x-5)=0$



$x\geqq 3$ から $x=5$ となり，交点の座標は $(5,\ 3)$ である。

また，曲線 $y=f(x)$ は，直線 $x=3$ に関して対称であることを利用すると，求める部分の面積 S は，

$$S=2\int_0^3(-x^2+4x)\,dx-\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3-\int_5^6(-x^2+8x-12)\,dx$$

$$=2\Big[-\frac{x^3}{3}+2x^2\Big]_0^3-\frac{15}{2}-\Big[-\frac{x^3}{3}+4x^2-12x\Big]_5^6$$

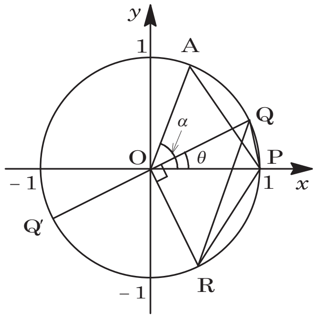
$$=18-\frac{15}{2}+\frac{91}{3}-44+12=\frac{53}{6}$$

[解　説]

絶対値つきの関数のグラフを題材にした標準的な問題です。

2

問題のページへ



(1)　$\cos(\theta-90^\circ)=\sin\theta$，$\sin(\theta-90^\circ)=\cos\theta$ から,

$$S=\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}\sin\theta$$

$$T=\triangle\mathrm{OPR}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left|-\cos\theta\right|=\frac{1}{2}\cos\theta$$

また，$\triangle\mathrm{OPA}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\sin\alpha$，$\mathrm{QR}=\sqrt{2}$ なので，条件より，$\frac{1}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$

$$\sqrt{2}\sin(\theta+45^\circ)=\sqrt{2}\sin\alpha$$

$$\sin\alpha-\sin(\theta+45^\circ)=0$$

$$2\cos\frac{\alpha+\theta+45^\circ}{2}\sin\frac{\alpha-\theta-45^\circ}{2}=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$\theta<\alpha<\theta+90^\circ$ より，

$$\theta+\frac{45^\circ}{2}<\frac{\alpha+\theta+45^\circ}{2}<\theta+\frac{135^\circ}{2},\quad -\frac{45^\circ}{2}<\frac{\alpha-\theta-45^\circ}{2}<\frac{45^\circ}{2}$$

さらに，$15^\circ\leqq\theta\leqq 45^\circ$ から $\theta+\frac{45^\circ}{2}<90^\circ$ は満たされているので, (＊)の解は,

(i)　$90^\circ<\theta+\frac{135^\circ}{2}\left(\frac{45^\circ}{2}<\theta\leqq 45^\circ\right)$ のとき

$\frac{\alpha+\theta+45^\circ}{2}=90^\circ$，$\frac{\alpha-\theta-45^\circ}{2}=0^\circ$ より，$\alpha=-\theta+135^\circ$，$\alpha=\theta+45^\circ$

(ii)　$\theta+\frac{135^\circ}{2}\leqq 90^\circ\left(15^\circ\leqq\theta\leqq\frac{45^\circ}{2}\right)$ のとき

$\frac{\alpha-\theta-45^\circ}{2}=0^\circ$ より，$\alpha=\theta+45^\circ$

(2)　$T-S=\frac{1}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\theta+135^\circ)$

$150^\circ\leqq\theta+135^\circ\leqq 180^\circ$ より，$0\leqq T-S\leqq\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

なお, 最大値をとるのは，$\theta+135^\circ=150^\circ$ $(\theta=15^\circ)$ のときである。

(3)　$\theta=15^\circ$ のとき,

$$S=\frac{1}{2}\sin 15^\circ=\frac{1}{2}\sin(45^\circ-30^\circ)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$$

$$T=\frac{1}{2}\cos 15^\circ=\frac{1}{2}\cos(45^\circ-30^\circ)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$$

このとき，$\triangle\mathrm{OPQ}=\triangle\mathrm{OPQ'}$ より，$\triangle\mathrm{PQQ'}=2S=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

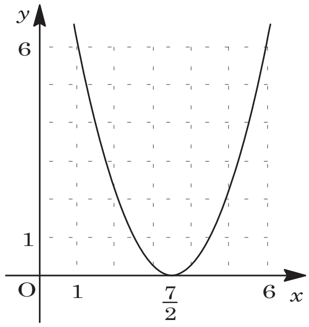
[解 説]

増築を重ねた家屋という構図の問題です。なお, (3)は(1)と(2)を用いずに，直接的に計算をしています。

3

問題のページへ

(1)　$y \geqq x^2 - 7x + \dfrac{49}{4} = \left(x - \dfrac{7}{2}\right)^2$ より，領域 D に属する点 $(m,\ n)$ は，



$(2,\ 3)$，$(2,\ 4)$，$(2,\ 5)$，$(2,\ 6)$，$(3,\ 1)$，
$(3,\ 2)$，$(3,\ 3)$，$(3,\ 4)$，$(3,\ 5)$，$(3,\ 6)$，
$(4,\ 1)$，$(4,\ 2)$，$(4,\ 3)$，$(4,\ 4)$，$(4,\ 5)$，
$(4,\ 6)$，$(5,\ 3)$，$(5,\ 4)$，$(5,\ 5)$，$(5,\ 6)$

したがって，点 $(m,\ n)$ が D に属する確率は，

$$\frac{20}{6^2} = \frac{5}{9}$$

(2)　まず，各々の k の値に対応した点 P, Q の座標は，

(i)　$k=1$ のとき $\mathrm{P}(1,\ 2)$，$\mathrm{Q}(2,\ 0)$　　(ii)　$k=2$ のとき $\mathrm{P}(2,\ 3)$，$\mathrm{Q}(3,\ 1)$
(iii)　$k=3$ のとき $\mathrm{P}(3,\ 4)$，$\mathrm{Q}(4,\ 2)$　　(iv)　$k=4$ のとき $\mathrm{P}(4,\ 5)$，$\mathrm{Q}(5,\ 3)$
(v)　$k=5$ のとき $\mathrm{P}(5,\ 6)$，$\mathrm{Q}(6,\ 4)$　　(vi)　$k=6$ のとき $\mathrm{P}(6,\ 7)$，$\mathrm{Q}(7,\ 5)$

よって，$k=2,\ 3,\ 4$ のとき，点 P, Q はともに D に属する。

さて, 2 点 P と Q を通る直線の方程式は,

$$y-(k+1) = -2(x-k),\quad y = -2x+3k+1 \cdots\cdots\cdots①$$

放物線 $y = x^2 - 7x + \dfrac{49}{4} \cdots\cdots②$ との交点は,

$$x^2 - 7x + \frac{49}{4} = -2x + 3k + 1,\quad x^2 - 5x + \frac{45}{4} - 3k = 0$$

よって，$x = \dfrac{5 \pm \sqrt{12k-20}}{2}$ となる。

これを，$x = \alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ とおくと，①②で囲まれた部分の面積 S_k は,

$$S_k = \int_\alpha^\beta -\left(x^2 - 5x + \frac{49}{4} - 3k\right)dx = -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$
$$= \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{6}(\sqrt{12k-20})^3$$

すると，得点は，$k=2$ のとき $S_2 = \dfrac{1}{6}\cdot 2^3 = \dfrac{4}{3}$，$k=3$ のとき $S_3 = \dfrac{1}{6}\cdot 4^3 = \dfrac{32}{3}$，$k=4$ のとき $S_4 = \dfrac{1}{6}\cdot(2\sqrt{7})^3 = \dfrac{28\sqrt{7}}{3}$ となり，その期待値は,

$$\frac{1}{6}\times\frac{4}{3} + \frac{1}{6}\times\frac{32}{3} + \frac{1}{6}\times\frac{28\sqrt{7}}{3} = \frac{18+14\sqrt{7}}{9}$$

［解 説］

数え上げることがポイントですが，計算量は多めです。なお，(2)の後半は一般的に解いた方が，記述は少なくてすみます。