1

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)=-x^3+3ax-2b$ に対して，$f(x)=0$ が 2 重解または 3 重解をもつならば，$a^3=b^2$ となることを示せ。ただし，$a \geqq 0$ とする。

(2) (i) xy 平面上の直線 $l: y=mx+\dfrac{1}{3}$ が曲線 $C: y=x^{\frac{2}{3}}\ (x \geqq 0)$ に接するとき，直線 l の傾き m の値と接点の座標を求めよ。

(ii) (i)で求めた m の値に対する直線 l，曲線 C および y 軸で囲まれた部分を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

2

解答解説のページへ

A を 2 次の正方行列とし，a と b はどちらも 0 でない実数とする。零ベクトルではない 2 つのベクトル $\vec{u}=(x,\ y)$，$\vec{v}=(z,\ w)$ に対して，

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=a\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}=b\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$

が成り立つとする。$X=\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　$xw=yz$ ならば，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ は平行であることを示せ。

(2)　X が逆行列をもたなければ，$a=b$ であることを示せ。

(3)　a と b が異なるならば, A は逆行列をもつことを示せ。

3

解答解説のページへ

$-1<t<1$ を満たす t に対して，xy 平面上の直線 $y=t$ と楕円 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ の交点を $\mathrm{Q}(-s,\ t)$，$\mathrm{R}(s,\ t)$ $(s>0)$ とする。点 $\mathrm{P}(0,\ 1)$ に対して，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を $S(t)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$S(t)$ を求めよ。また，$-1<t<1$ における $S(t)$ の最大値とそのときの点 R の座標を求めよ。

(2)　(1)で求めた点 R における楕円 C の接線 l と x 軸との交点を T とするとき，$\cos\angle\mathrm{PRT}$ の値を求めよ。

(3)　楕円 C で囲まれる図形は直線 PR によって 2 つの部分に分割される。このうち原点が属さない方の面積を，(1)で求めた点 R に対して求めよ。

4

解答解説のページへ

1 つの袋に 5 個の玉が入っており，それぞれに，0，1，2，3，4 の数字が書かれている。この袋から玉を 1 つ取り出し，もとに戻すという試行をくり返していき，取り出した玉に書かれた数字と直前の試行で取り出した玉の数字との和が 4 となったとき終了する。$n \geqq 2$ とする。n 回以下の試行で終了したときは，最後に取り出した玉に書かれた数字を得点とし，n 回の試行では終了しない場合の得点は 0 とする。このようにして定まる得点の期待値を E_n とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $2 \leqq k \leqq n$ とする。ちょうど k 回目の試行で終了する確率を P_k とするとき，P_2，P_3，P_4 を求めよ。また，P_k を k を用いて表せ。

(2) E_2，E_3 を求めよ。また，E_n を n を用いて表せ。

(3) 極限値 $\alpha = \lim_{n \to \infty} E_n$ を求め，さらに $E_n \geqq \alpha - \frac{1}{100}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

1

問題のページへ

(1)　条件より，$f(x)=0$ すなわち $x^3-3ax+2b=0$ の解を $x=\alpha,\ \alpha,\ \beta$ とおくと，解と係数の関係より，

$$2\alpha+\beta=0\cdots\cdots\cdots①,\ \alpha^2+2\alpha\beta=-3a\cdots\cdots\cdots②,\ \alpha^2\beta=-2b\cdots\cdots\cdots③$$

①より $\beta=-2\alpha$ となり，②③に代入すると，

$$\alpha^2-4\alpha^2=-3a,\ -2\alpha^3=-2b$$

すると，$\alpha^2=a$ かつ $\alpha^3=b$ から，$a^3=b^2$ となる。

(2)　$C: y=x^{\frac{2}{3}}$ 上の接点を $\left(t,\ t^{\frac{2}{3}}\right)$ とおくと，$y'=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ より，接線の方程式は，

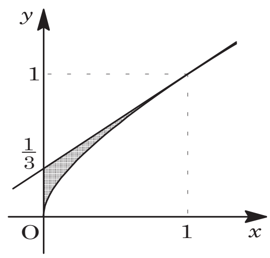
$$y-t^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}(x-t),\ y=\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}x+\frac{1}{3}t^{\frac{2}{3}}$$

直線 $l: y=mx+\dfrac{1}{3}$ と一致することより，

$$\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}=m\cdots\cdots\cdots④,\ \frac{1}{3}t^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\cdots\cdots\cdots⑤$$

$t\geqq 0$ より，⑤から $t=1$ となり，接点の座標は $(1,\ 1)$，また④から $m=\dfrac{2}{3}$ である。

さて，直線 l，曲線 C および y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V とすると，$C: x=y^{\frac{3}{2}}$ より，



$$V=\pi\int_0^1\left(y^{\frac{3}{2}}\right)^2dy-\frac{1}{3}\pi\cdot1^2\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

$$=\pi\int_0^1 y^3dy-\frac{2}{9}\pi=\frac{1}{4}\pi-\frac{2}{9}\pi=\frac{1}{36}\pi$$

［解 説］

小問 2 題という構成に変わりました。どちらも，基本的な内容です。

2

問題のページへ

(1)　(i)　$x \neq 0$ のとき　$xw = yz$ から $w = \dfrac{yz}{x}$ となり，

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \dfrac{yz}{x} \end{pmatrix} = \frac{z}{x}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{z}{x}\vec{u}$$

(ii)　$x = 0$ のとき　$\vec{u} \neq \vec{0}$ から $y \neq 0$ で，$xw = yz$ から $z = 0$，$\vec{v} \neq \vec{0}$ から $w \neq 0$ となり，

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ w \end{pmatrix} = \frac{w}{y}\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \frac{w}{y}\vec{u}$$

(i)(ii)より，いずれの場合も $\vec{u}$ と $\vec{v}$ は平行である。

(2)　X が逆行列をもたない条件は，$\det X = 0$ から，$xw = yz$

このとき, (1)より，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ は平行であり，$\vec{v} = k\vec{u}$ $(k \neq 0)$ ……①と表せる。

ここで，条件より，

$A\vec{u} = a\vec{u}$ ………②，$A\vec{v} = b\vec{v}$ ………③

①③より，$Ak\vec{u} = bk\vec{u}$ となり，$k \neq 0$ から $A\vec{u} = b\vec{u}$ ………④

②④より，$a\vec{u} = b\vec{u}$ となり，$\vec{u} \neq \vec{0}$ から $a = b$ である。

(3)　(2)より，$a \neq b$ ならば X は逆行列をもち，$\det X \neq 0$ である。

②③をまとめると，$A\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & bz \\ ay & bw \end{pmatrix}$ となり，

$$A\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\ AX = X\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

ここで，$\det\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = ab$ より，両辺の行列式をとると，

$$\det A \cdot \det X = ab \det X$$

$ab \neq 0$ から $\det A \neq 0$ となり, A は逆行列をもつ。

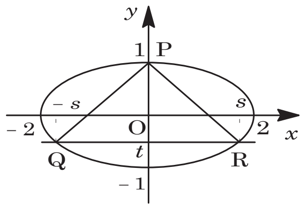
［解 説］

有名な定理の証明です。誘導に従うと，無理なく進みます。

3

問題のページへ

(1) △PQR の面積 $S(t)$ は,



$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot 2s(1-t)=s(1-t)$$

ここで, $\frac{s^2}{4}+t^2=1$ より, $s=2\cos\theta$, $t=\sin\theta$ とおける。すると, $s>0$, $-1<t<1$ から, $-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$ となり, $S(t)=f(\theta)$ とすると,

$$f(\theta)=2\cos\theta(1-\sin\theta)$$

$$f'(\theta)=-2\sin\theta(1-\sin\theta)-2\cos^2\theta=4\sin^2\theta-2\sin\theta-2$$

$$=2(2\sin\theta+1)(\sin\theta-1)$$

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$-\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		+	0	−	
$f(\theta)$		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	

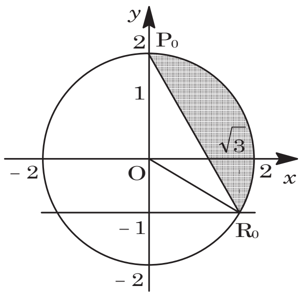
よって, 右表より $S(t)$ は最大値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。このとき, $\theta=-\frac{\pi}{6}$ から $s=\sqrt{3}$, $t=-\frac{1}{2}$ となり, $\mathrm{R}\left(\sqrt{3},\ -\frac{1}{2}\right)$ である。

(2) R における接線 l は $\frac{\sqrt{3}}{4}x-\frac{1}{2}y=1$ となり, x 軸との交点は $\mathrm{T}\left(\frac{4}{\sqrt{3}},\ 0\right)$ である。

これより, $\overrightarrow{\mathrm{RT}}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\left(-\sqrt{3},\ \frac{3}{2}\right)$ となり,

$$\cos\angle\mathrm{PRT}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{RT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{RT}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{RP}}|}=\frac{-1+\frac{3}{4}}{\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}\sqrt{3+\frac{9}{4}}}=-\frac{1}{7}$$

(3) 楕円 C を y 軸方向に 2 倍拡大すると, 点 P は $\mathrm{P_0}(0,\ 2)$, 点 R は $\mathrm{R_0}(\sqrt{3},\ -1)$ に移り, $\angle\mathrm{P_0OR_0}=\frac{2}{3}\pi$ となる。



ここで, 右図の弓形の面積を S_0 とおくと,

$$S_0=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\cdot 2^2\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$$

すると, 直線 PR によって分割される楕円 C の原点を含まない部分の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}S_0=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

［解 説］

楕円についての基本的な問題です。(3)では, 楕円を円にいったん変換して, 面積を計算しました。

4

問題のページへ

(1)　終了直前に取り出した玉の数字は，$0+4$，$1+3$，$2+2$，$3+1$，$4+0$ のいずれかである。ここで，ちょうど k 回目の試行で終了する確率を P_k とすると，

$$P_2=\frac{1}{5}\times\frac{1}{5}\times 5=\frac{1}{5},\ \ P_3=(1-P_2)\times\frac{1}{5}=\frac{4}{25},\ \ P_4=(1-P_2-P_3)\times\frac{1}{5}=\frac{16}{125}$$

これより，一般的に $P_k=\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2}$ と推測できる。以下，この式を数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$k=2$ のとき　$P_2=\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^0=\frac{1}{5}$ より成立する。

(ii)　$k\leqq l$ のとき　$P_k=\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2}$ と仮定すると，

$$\begin{aligned}P_{l+1}&=(1-P_2-P_3-\cdots-P_l)\times\frac{1}{5}\\&=\left\{1-\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}-\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2-\cdots-\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{l-2}\right\}\times\frac{1}{5}\\&=\left\{1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{l-1}}{1-\frac{4}{5}}\right\}\times\frac{1}{5}=\left\{1-1+\left(\frac{4}{5}\right)^{l-1}\right\}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{l-1}\end{aligned}$$

よって，$k=l+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$2\leqq k\leqq n$ のとき，$P_k=\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2}$ である。

(2)　2 回の試行で終了したとき，得点が 0 以外，すなわち 1, 2, 3, 4 となる確率は，それぞれ $\frac{1}{5}P_2=\frac{1}{25}$ ずつであるので，その期待値 E_2 は，

$$E_2=1\times\frac{1}{25}+2\times\frac{1}{25}+3\times\frac{1}{25}+4\times\frac{1}{25}=\frac{2}{5}$$

また，3 回以下の試行で終了したとき，得点が 0 以外，すなわち 1, 2, 3, 4 となる確率は，それぞれ $\frac{1}{5}P_2+\frac{1}{5}P_3=\frac{9}{125}$ ずつであるので，その期待値 E_3 は，

$$E_3=1\times\frac{9}{125}+2\times\frac{9}{125}+3\times\frac{9}{125}+4\times\frac{9}{125}=\frac{18}{25}$$

同様に，n 回以下の試行で終了したとき，得点が 0 以外，すなわち 1, 2, 3, 4 となる確率は，それぞれ，

$$\begin{aligned}\frac{1}{5}P_2+\frac{1}{5}P_3+\cdots+\frac{1}{5}P_n&=\frac{1}{5}\left\{\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2+\cdots+\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-2}\right\}\\&=\frac{1}{5}\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\}\end{aligned}$$

よって，得点の期待値 E_n は，

$$E_n=(1+2+3+4)\times\frac{1}{5}\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\}=2\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\}$$

(3)　(2)から，$\alpha=\lim_{n\to\infty}E_n=2$ となり，$E_n\geqq\alpha-\frac{1}{100}$ ……(＊)より，

$$2\left\{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right\} \geqq 2-\frac{1}{100},\ \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \leqq \frac{1}{200}$$

両辺の対数をとって,

$$(n-1)(\log_{10} 4-\log_{10} 5) \leqq -(\log_{10} 5+\log_{10} 4+1)$$

$$(n-1)(3\log_{10} 2-1) \leqq -(2+\log_{10} 2)$$

$3\log_{10} 2-1<0$ より,

$$n \geqq \frac{2+\log_{10} 2}{1-3\log_{10} 2}+1 \fallingdotseq 24.7$$

よって, (∗)を満たす最小の自然数 n は 25 である。

［解 説］

(1)と(2)は，ともに題意に沿った形で，帰納的に解いています。なお，直接的に P_k を導くことも可能です。