1

解答解説のページへ

実数 a に対して，関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$f(x)=-(a+1)x-1,\quad g(x)=2x+\frac{a}{3}$$

とし，$m(a)=\int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$m(a)>0$ を満たす a の値の範囲を求めよ。

(2)　(1)で求めた a の値の範囲において，関数 $h(x)=g(x)-m(a)f(x)$ を考える。このとき，$\int_0^1 f(x)h(x)\,dx=0$ となる a の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

xyz 空間において，原点 O を中心とする半径 1 の球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$，および S 上の点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$ を考える。S 上の A と異なる点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ に対して，2 点 A, P を通る直線と xy 平面の交点を Q とする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$（$t$ は実数）とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を t，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の成分表示を x_0，y_0，z_0 を用いて表せ。

(3) 球面 S と平面 $y=\dfrac{1}{2}$ の共通部分が表す図形を C とする。点 P が C 上を動くとき，xy 平面上における点 Q の軌跡を求めよ。

3

解答解説のページへ

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で定義された関数

$$f(\theta) = a\sin\theta\cos\theta + b(\sin\theta - \cos\theta) - 1$$

を考える。ただし, a, b は正の実数とする。次の問いに答えよ。

(1) $t = \sin\theta - \cos\theta$ として, $f(\theta)$ を a, b, t を用いて表せ。また, t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 等式 $f(\theta) = 0$ を満たす θ が存在するような点 $(a,\ b)$ 全体からなる領域を座標平面上に図示せよ。

1

問題のページへ

(1)　$m(a)=\int_0^1 f(x)g(x)dx=\int_0^1 -\{(a+1)x+1\}\left(2x+\frac{a}{3}\right)dx$ より，

$$m(a)=-\int_0^1\left\{2(a+1)x^2+\frac{a^2+a+6}{3}x+\frac{a}{3}\right\}dx$$

$$=-\frac{2(a+1)}{3}-\frac{a^2+a+6}{6}-\frac{a}{3}=\frac{-a^2-7a-10}{6}$$

ここで，$m(a)>0$ より，$a^2+7a+10<0$，$(a+2)(a+5)<0$ となり，

$-5<a<-2$

(2)　$h(x)=g(x)-m(a)f(x)$ より，

$$\int_0^1 f(x)h(x)dx=\int_0^1[f(x)g(x)-m(a)\{f(x)\}^2]dx$$

$$=m(a)-m(a)\int_0^1\{f(x)\}^2dx$$

さて，$m(a)>0$ より，$\int_0^1 f(x)h(x)dx=0$ は，$\int_0^1\{f(x)\}^2dx=1$ と同値であり，

$$\int_0^1\{f(x)\}^2dx=\int_0^1\{(a+1)^2x^2+2(a+1)x+1\}dx=\frac{(a+1)^2}{3}+(a+1)+1$$

よって，$\frac{(a+1)^2}{3}+(a+1)+1=1$ から，$a+1=-3,\ 0$ となる。

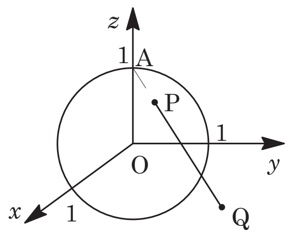
すると, (1)より，$-5<a<-2$ なので，$a=-4$ である。

［解 説］

(2)は(1)と関連し，クリアーに解ける設問になっています。

2

問題のページへ



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=t(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

(2)　(1)より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)(0,\ 0,\ 1)+t(x_0,\ y_0,\ z_0)$

$$=(tx_0,\ ty_0,\ 1-t+tz_0)$$

ここで，点 Q は xy 平面上の点なので，$1-t+tz_0=0$

すると，$z_0\neq 1$から，$t=\dfrac{1}{1-z_0}$となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(\frac{x_0}{1-z_0},\ \frac{y_0}{1-z_0},\ 0\right)$$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(x,\ y,\ 0)$とおくと，(2)より，$x=\dfrac{x_0}{1-z_0}$ ………①，$y=\dfrac{y_0}{1-z_0}$ ………②

条件より，点$\mathrm{P}(x_0,\ y_0,\ z_0)$は，球面$S: x^2+y^2+z^2=1$と平面$y=\dfrac{1}{2}$の共通部分である C 上を動くことより，

$$x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2=1\ \cdots\cdots\cdots③,\quad y_0=\frac{1}{2}\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$x_0{}^2+z_0{}^2=\dfrac{3}{4}$ ………⑤

また，②④より，$y=\dfrac{1}{2(1-z_0)}$となり，$y\neq 0$から，$1-z_0=\dfrac{1}{2y}$，

$$z_0=1-\frac{1}{2y}\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

①⑥より，$x_0=\dfrac{x}{2y}$ ………⑦

⑥⑦を⑤に代入すると，$\left(\dfrac{x}{2y}\right)^2+\left(1-\dfrac{1}{2y}\right)^2=\dfrac{3}{4}$

$$x^2+(2y-1)^2=3y^2,\quad x^2+y^2-4y+1=0\ \cdots\cdots\cdots⑧$$

⑧は $y\neq 0$ を満たすことより，点 Q は xy 平面上で円$x^2+y^2-4y+1=0$を描く。

[解 説]

有名な構図の問題です。誘導がたいへん丁寧です。

3

問題のページへ

(1)　$t=\sin\theta-\cos\theta$ とおくと，$t^2=1-2\sin\theta\cos\theta$ より，$\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{2}$ となり，

$$f(\theta)=\frac{a(1-t^2)}{2}+bt-1=-\frac{a}{2}t^2+bt+\frac{a}{2}-1$$

また，$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ より，$0\leqq\theta\leqq\pi$ において $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)\leqq 1$ となり，

$$-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$$

(2)　$g(t)=-\dfrac{a}{2}t^2+bt+\dfrac{a}{2}-1$ とおくとき，$f(\theta)=0$ を満たす θ が存在する条件は，$g(t)=0$ が $-1\leqq t\leqq\sqrt{2}$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ条件に等しい。

ここで，$a>0$, $b>0$ において，$g(t)=-\dfrac{a}{2}\left(t-\dfrac{b}{a}\right)^2+\dfrac{b^2}{2a}+\dfrac{a}{2}-1$ となり，

$$g(\sqrt{2})=-\frac{a}{2}+\sqrt{2}b-1,\quad g(-1)=-b-1<0$$

(i)　$0<\dfrac{b}{a}\leqq\sqrt{2}$ $(0<b\leqq\sqrt{2}a)$ のとき

$g(-1)<0$ より，求める条件は，$\dfrac{b^2}{2a}+\dfrac{a}{2}-1\geqq 0$ となり，

$$a^2+b^2-2a\geqq 0,\quad (a-1)^2+b^2\geqq 1$$

(ii)　$\dfrac{b}{a}>\sqrt{2}$ $(b>\sqrt{2}a)$ のとき

$g(-1)<0$ より，求める条件は，$g(\sqrt{2})=-\dfrac{a}{2}+\sqrt{2}b-1\geqq 0$ となり，

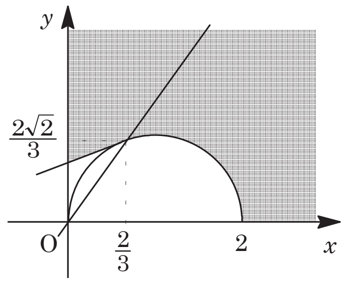
$$\sqrt{2}b\geqq\frac{a}{2}+1,\quad b\geqq\frac{\sqrt{2}}{4}a+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(i)(ii)より，点 $(a,\ b)$ の全体からなる領域は，

$0<y\leqq\sqrt{2}x$ のとき $(x-1)^2+y^2\geqq 1$

$y>\sqrt{2}x$ のとき $y\geqq\dfrac{\sqrt{2}}{4}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

よって，図示すると，右図の網点部となる。ただし，x 軸, y 軸以外の境界は領域に含む。



［解 説］

(2)では，$g(-1)<0$ であることに着目するのがポイントです。