1　　解答解説のページへ

自然数 n に対して, 2 次の正方行列 A_n を

$$A_1=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix},\ \ A_{n+1}=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}A_n\quad(n\geqq 1)$$

により定める。また, 2 次正方行列 B_n は

$$B_{n+1}=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}B_n-\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix}\quad(n\geqq 1)$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　数学的帰納法を用いて, $A_n=\begin{pmatrix}2^{n-1}&2^{n-1}+3^{n-1}\\0&3^{n-1}\end{pmatrix}$ $(n\geqq 1)$ が成り立つことを示せ。

(2)　ある 2 次正方行列 C に対して, $C=B_n-A_n$ がすべての n について成り立つとする。このとき, C を求めよ。

(3)　(2)の条件を満たす B_n のうち, 逆行列をもたないものは B_1 に限ることを示せ。

2　解答解説のページへ

a を実数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$a \geqq 0$ のとき，$S(a)=\int_0^1 |x^3-3ax^2+2a^2x|\,dx$ を求めよ。

(2)　a が $0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$ の範囲を動くとき，$S(a)$ の最大値を求めよ。

3

解答解説のページへ

xy 平面において，原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする。a を正の実数とし，点 A$(0,\ 1)$ を通り，傾き a の直線を l とする。C と l の交点で，A と異なるものを P とし，l と直線 $y=-2$ の交点を Q とする。また，P における C の接線を m とし，m と直線 $y=-2$ の交点を R とする。次の問いに答えよ。

(1)　直線 m の方程式を a を用いて表せ。

(2)　a が正の値をとって動くとき，線分 QR の長さの最小値と，そのときの a の値を求めよ。

(3)　(2)で求めた a の値に対して，点 A を通り，$\angle$QAR を二等分する直線の方程式を求めよ。

4　　解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　a を定数とし，正の数からなる数列$\{x_n\}$は，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{x_n+n}-\sqrt{n})=a$ を満たすとする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}=2a$ が成り立つことを示せ。

(2)　自然数 $L,\ n$ に対して

$$\sqrt{L+n+1}-\sqrt{n+1}<\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{\sqrt{k+n}}<\sqrt{L+n}-\sqrt{n}$$

が成り立つことを示せ。

(3)　b は定数で，$b>1$ とする。自然数 n に対して，集合

$$\left\{L \,\middle|\, L\text{ は}\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{\sqrt{k+n}}<b\text{を満たす自然数}\right\}$$

の要素の個数を L_n とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{\sqrt{n}}=b$ が成り立つことを示せ。

1

問題のページへ

(1)　$A_n=\begin{pmatrix}2^{n-1} & 2^{n-1}+3^{n-1}\\ 0 & 3^{n-1}\end{pmatrix}$であることを，数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$n=1$のとき　$A_1=\begin{pmatrix}2^0 & 2^0+3^0\\ 0 & 3^0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$となり成立する。

(ii)　$n=k$のとき　$A_k=\begin{pmatrix}2^{k-1} & 2^{k-1}+3^{k-1}\\ 0 & 3^{k-1}\end{pmatrix}$と仮定する。

$$A_{k+1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^{k-1} & 2^{k-1}+3^{k-1}\\ 0 & 3^{k-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^k & 2^k+2\cdot 3^{k-1}+3^{k-1}\\ 0 & 3^k\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2^k & 2^k+3^k\\ 0 & 3^k\end{pmatrix}$$

よって，$n=k+1$のときも成立する。

(i)(ii)より，$n\geqq 1$において，$A_n=\begin{pmatrix}2^{n-1} & 2^{n-1}+3^{n-1}\\ 0 & 3^{n-1}\end{pmatrix}$である。

(2)　$A_{n+1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}A_n$，$B_{n+1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}B_n-\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$に対し，

$$B_{n+1}-A_{n+1}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}(B_n-A_n)-\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

すると，条件より，$C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}C-\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$となり，

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}C-C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}C=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

よって，$C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

(3)　(1)(2)の結果より，

$$B_n=A_n+C=\begin{pmatrix}2^{n-1} & 2^{n-1}+3^{n-1}\\ 0 & 3^{n-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{n-1} & 2^{n-1}+3^{n-1}+1\\ 1 & 3^{n-1}+2\end{pmatrix}$$
$$\det B_n=2^{n-1}(3^{n-1}+2)-(2^{n-1}+3^{n-1}+1)=2^{n-1}\cdot 3^{n-1}+2^{n-1}-3^{n-1}-1$$
$$=(2^{n-1}-1)(3^{n-1}+1)$$

これより，$\det B_n=0$となるのは，$2^{n-1}=1$すなわち$n=1$のときのみである。
したがって，B_nのうち，逆行列をもたないものはB_1だけである。

[解 説]

ていねいな誘導のついた行列の漸化式の基本問題です。

2

問題のページへ

(1)　$S(a)=\int_0^1 |x^3-3ax^2+2a^2x|\,dx$ に対し，$x^3-3ax^2+2a^2x=x(x-a)(x-2a)$

(i)　$1\leqq a$ のとき

$$S(a)=\int_0^1 (x^3-3ax^2+2a^2x)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-ax^3+a^2x\right]_0^1=a^2-a+\frac{1}{4}$$

(ii)　$a<1\leqq 2a$　$\left(\frac{1}{2}\leqq a<1\right)$のとき

$$S(a)=\int_0^a (x^3-3ax^2+2a^2x)\,dx+\int_a^1 -(x^3-3ax^2+2a^2x)\,dx$$

$$=\frac{a^4}{4}-a^4+a^4-\frac{1}{4}(1-a^4)+a(1-a^3)-a^2(1-a^2)=\frac{a^4}{2}-a^2+a-\frac{1}{4}$$

(iii)　$2a\leqq 1$　$\left(0\leqq a\leqq\frac{1}{2}\right)$のとき

$$S(a)=\int_0^a (x^3-3ax^2+2a^2x)\,dx+\int_a^{2a} -(x^3-3ax^2+2a^2x)\,dx$$

$$+\int_{2a}^1 (x^3-3ax^2+2a^2x)\,dx$$

$$=\frac{a^4}{4}-\frac{15}{4}a^4+7a^4-3a^4+\frac{1}{4}(1-16a^4)-a(1-8a^3)+a^2(1-4a^2)$$

$$=\frac{a^4}{2}+a^2-a+\frac{1}{4}$$

(2)　$0\leqq a\leqq\frac{1}{2}$ のとき, (1)より，$S'(a)=2a^3+2a-1$

$$S''(a)=6a^2+2>0$$

これより，$S'(a)$ は単調に増加し，$S'(0)=-1$，$S'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ から，$0\leqq a\leqq\frac{1}{2}$ に $S'(a)=0$ となる a がただ 1 つ存在する。この値を $a=\alpha$ とおく。

すると，$S(a)$ の増減は右表のようになり，$S(a)$ の最大値は，$S(0)=\frac{1}{4}$ である。

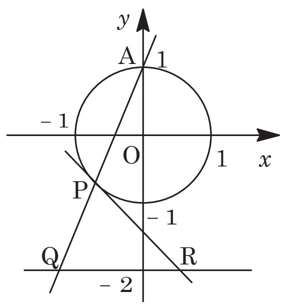
a	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$		$\nearrow$	$\frac{1}{32}$

[解　説]

定積分の計算問題です。計算ミスが致命傷になります。

3

問題のページへ



(1)　$C : x^2+y^2=1$ ……①と $l : y=ax+1$ ……②の交点は,

$$x^2+(ax+1)^2=1,\ (a^2+1)x^2+2ax=0$$

$x\neq 0$ の解は, $x=-\dfrac{2a}{a^2+1}$

②より, $y=-\dfrac{2a^2}{a^2+1}+1=\dfrac{-a^2+1}{a^2+1}$

よって, $\mathrm{P}\left(-\dfrac{2a}{a^2+1},\ \dfrac{-a^2+1}{a^2+1}\right)$となり, 点 P における円①の接線 m の方程式は,

$$-\frac{2a}{a^2+1}x+\frac{-a^2+1}{a^2+1}y=1,\ -2ax+(-a^2+1)y=a^2+1 \cdots\cdots\cdots③$$

(2)　②において, $y=-2$ とすると $x=-\dfrac{3}{a}$ から, $\mathrm{Q}\left(-\dfrac{3}{a},\ -2\right)$

③において, $y=-2$ とすると $x=\dfrac{a^2-3}{2a}$ から, $\mathrm{R}\left(\dfrac{a^2-3}{2a},\ -2\right)$

ここで, 相加平均と相乗平均の関係を用いると,

$$\mathrm{QR}=\left|\frac{a^2-3}{2a}+\frac{3}{a}\right|=\frac{a^2+3}{2a}=\frac{1}{2}\left(a+\frac{3}{a}\right)\geqq\sqrt{a\cdot\frac{3}{a}}=\sqrt{3}$$

ここで, 等号が成立するのは, $a=\dfrac{3}{a}$ $(a=\sqrt{3})$ のときである。

よって, 線分 QR の長さは, $a=\sqrt{3}$ のとき最小値 $\sqrt{3}$ をとる。

(3)　$a=\sqrt{3}$ のとき, ②より, 直線 AQ : $\sqrt{3}x-y+1=0$

また, $\mathrm{R}(0,\ -2)$ から, 直線 AR : $x=0$

すると, ∠QAR の二等分線は, 2 直線 AQ, AR から等距離にあることより,

$$\frac{|\sqrt{3}x-y+1|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}}=|x|,\ \sqrt{3}x-y+1=\pm 2x$$

∠QAR の二等分線の傾きは正より, $y=(2+\sqrt{3})x+1$

［解 説］

(3)では, 線分 QR を AQ : AR の比に内分する点を求め, 内角の二等分線の定理を利用しても OK です。

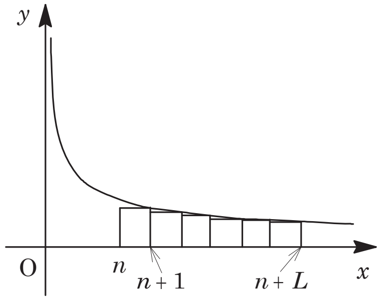
4

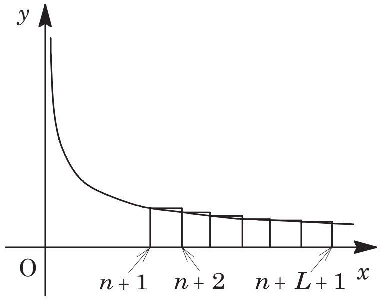
問題のページへ

(1)　$y_n = \sqrt{x_n + n} - \sqrt{n}$ とおくと，条件より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} y_n = a$ となり，

$$x_n + n = (y_n + \sqrt{n})^2,\quad x_n = {y_n}^2 + 2\sqrt{n}\,y_n$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{{y_n}^2}{\sqrt{n}} + 2y_n\right) = 2a$





(2)　$f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ とおくと，

$$f'(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} < 0,\quad f''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} > 0$$

これより，曲線 $y = f(x)$ は単調に減少し，下に凸となり，右上図から，

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{\sqrt{k+n}} < \int_n^{n+L} f(x)\,dx = \Big[\sqrt{x}\,\Big]_n^{n+L}$$
$$= \sqrt{L+n} - \sqrt{n}$$

また，右下図より，

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{\sqrt{k+n}} > \int_{n+1}^{n+L+1} f(x)\,dx = \Big[\sqrt{x}\,\Big]_{n+1}^{n+L+1}$$
$$= \sqrt{L+n+1} - \sqrt{n+1}$$

まとめると，

$$\sqrt{L+n+1} - \sqrt{n+1} < \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{\sqrt{k+n}} < \sqrt{L+n} - \sqrt{n}$$

(3)　条件より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{L_n}\frac{1}{\sqrt{k+n}} < b$……①，かつ，$\displaystyle b \leqq \sum_{k=1}^{L_n+1}\frac{1}{\sqrt{k+n}}$……②

(2)より，$\displaystyle\sqrt{L_n+n+1} - \sqrt{n+1} < \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L_n}\frac{1}{\sqrt{k+n}}$ ………③

①③より，$\displaystyle\sqrt{L_n+n+1} - \sqrt{n+1} < \frac{b}{2}$ ………④

また，(2)と同様にして，

$$\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{L+1}\frac{1}{\sqrt{k+n}} < \int_{n+1}^{n+L+1} f(x)\,dx = \Big[\sqrt{x}\,\Big]_{n+1}^{n+L+1} = \sqrt{L+n+1} - \sqrt{n+1}$$

すると，$\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L+1}\frac{1}{\sqrt{k+n}} - \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{L+n+1} - \sqrt{n+1}$ となり，

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L_n+1}\frac{1}{\sqrt{k+n}} - \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{L_n+n+1} - \sqrt{n+1}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

②⑤より，$\displaystyle\frac{b}{2} - \frac{1}{2\sqrt{n+1}} < \sqrt{L_n+n+1} - \sqrt{n+1}$ ………⑥

④⑥をまとめると，

$$\frac{b}{2}-\frac{1}{2\sqrt{n+1}}<\sqrt{L_n+n+1}-\sqrt{n+1}<\frac{b}{2}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{L_n+n+1}-\sqrt{n+1})=\frac{b}{2}$

すると, (1)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{\sqrt{n+1}}=2\cdot\frac{b}{2}=b$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{\sqrt{n+1}}\cdot\sqrt{\frac{n+1}{n}}=b$$

［解 説］

数年前まで，金沢大・理系で定番であった微積分の難問が復活です。特に，(3)は，記述しにくい設問です。