1　解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　$x>0$ のとき，不等式 $\dfrac{2}{3}\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)\geqq 2^{\frac{1}{3}}$ を示せ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(2)　数列 $\{a_n\}$ を，$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{2}{3}\left(a_n+\dfrac{1}{{a_n}^2}\right)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定める。

(i)　$n\geqq 1$ のとき，$a_n>a_{n+1}>2^{\frac{1}{3}}$ を示せ。

(ii)　$n\geqq 2$ のとき，$a_{n+1}-\dfrac{2}{{a_n}^2}<\dfrac{2}{3}\left(a_n-\dfrac{2}{{a_{n-1}}^2}\right)$ を示せ。

(iii)　$n\geqq 1$ のとき，$0<a_{n+1}-\dfrac{2}{{a_n}^2}\leqq\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ を示せ。

2

解答解説のページへ

実数 t と $0 \leqq \theta < 2\pi$ に対して, 2 次関数 $f(x)$, $g(x)$ を

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}t^2$$

$$g(x) = x^2 + \left(t - \frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{2}\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^4\theta + \cos^4\theta) + \frac{1}{16}$$

とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $\frac{1}{2}$, $2\sin^2\theta\cos^2\theta$, $\sin^4\theta + \cos^4\theta$ の大小を比べよ。また, この 3 つの値が等しくなる θ をすべて求めよ。

(2) θ は(1)で求めた値とは異なる定数とする。

(i) 2 次方程式 $g(x) = 0$ の判別式を $D(t)$ とするとき, 2 次方程式 $D(t) = 0$ の解 α, β $(\alpha < \beta)$ を求め, $\int_\alpha^\beta D(t)\,dt = -\frac{\cos^6 2\theta}{6}$ となることを示せ。

(ii) 2 つの 2 次方程式 $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ の一方が異なる 2 つの実数解をもち, 他方が虚数解をもつための t の範囲を求めよ。

3

解答解説のページへ

xy 平面において，点 A$(a,\ 0)$ を中心とする半径 r の円を C とする。ただし，$0<r\leqq a$ とする。円 C の周上に，y 座標が正である点 P と，点 E$(a+r,\ 0)$ をとる。さらに，点 P における円 C の接線と y 軸との交点を Q, 2 点 E, P を通る直線と y 軸との交点を R，$\angle$AEP を θ とする。このとき，3 点 P，Q，R を頂点とする△PQR について，次の問いに答えよ。

(1) △PQR は辺 PR を底辺とする二等辺三角形であることを示せ。次に，これが正三角形となる場合の，θ の値を求めよ。

(2) △PQR が正三角形となり，さらに頂点の 1 つが原点と一致する場合の，a と r の関係式を求めよ。

(3) △PQR が正三角形となり，さらにその外接円の半径が円 C の半径 r と等しくなる場合の, a と r の関係式を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$x>0$ から，相加平均と相乗平均の関係を用いて，

$$\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{x^2}\right)\geqq 2\times\sqrt[3]{\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{x^2}}=2\sqrt[3]{2^{-2}}=2^{\frac{1}{3}}$$

等号は $\frac{1}{2}x=\frac{1}{x^2}$，すなわち $x=\sqrt[3]{2}$ のときに成立する。

(2)　(i)　まず，$a_n>2^{\frac{1}{3}}$ を数学的帰納法で証明する。

(a)　$n=1$ のとき　$a_1=2$ より成立する。

(b)　$n=k$ のとき　$a_k>2^{\frac{1}{3}}$ の成立を仮定すると, (1)より,

$$a_{k+1}=\frac{2}{3}\left(a_k+\frac{1}{a_k{}^2}\right)\geqq 2^{\frac{1}{3}}$$

等号成立は $a_k=\sqrt[3]{2}$ のときなので仮定に反し，よって $a_{k+1}>2^{\frac{1}{3}}$ となる。

(a)(b)より，$a_n>2^{\frac{1}{3}}$ である。

また，$a_n-a_{n+1}=a_n-\frac{2}{3}\left(a_n+\frac{1}{a_n{}^2}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{a_n{}^3-2}{a_n{}^2}$ となり，$a_n>2^{\frac{1}{3}}$ から，

$$a_n-a_{n+1}>0,\ a_n>a_{n+1}$$

以上より，$a_n>a_{n+1}>2^{\frac{1}{3}}$ が成り立つ。

(ii)

$$\frac{2}{3}\left(a_n-\frac{2}{a_{n-1}{}^2}\right)-\left(a_{n+1}-\frac{2}{a_n{}^2}\right)=\frac{2}{3}\left(a_n-\frac{2}{a_{n-1}{}^2}\right)-\frac{2}{3}\left(a_n+\frac{1}{a_n{}^2}\right)+\frac{2}{a_n{}^2}$$

$$=-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{a_{n-1}{}^2}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{a_n{}^2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{a_{n-1}{}^2-a_n{}^2}{a_{n-1}{}^2a_n{}^2}$$

$n\geqq 2$ のとき, (i)より $a_{n-1}>a_n>2^{\frac{1}{3}}$ から，$\frac{4}{3}\cdot\frac{a_{n-1}{}^2-a_n{}^2}{a_{n-1}{}^2a_n{}^2}>0$ となり,

$$a_{n+1}-\frac{2}{a_n{}^2}<\frac{2}{3}\left(a_n-\frac{2}{a_{n-1}{}^2}\right)$$

(iii) (i)より，$a_n>a_{n+1}>2^{\frac{1}{3}}$ なので，$a_{n+1}-\frac{2}{a_n{}^2}=\frac{a_{n+1}a_n{}^2-2}{a_n{}^2}>0$

$n\geqq 1$ のとき, (ii)より，$a_{n+1}-\frac{2}{a_n{}^2}\leqq\left(a_2-\frac{2}{a_1{}^2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$　（等号は $n=1$ のとき）

さて，$a_2-\frac{2}{a_1{}^2}=\frac{2}{3}\left(2+\frac{1}{4}\right)-\frac{2}{4}=1$ となるので，$a_{n+1}-\frac{2}{a_n{}^2}\leqq\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ から,

$$0<a_{n+1}-\frac{2}{a_n{}^2}\leqq\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

［解 説］

量的にかなりのもので，この１題の中に５つの証明題が詰められています。

2

問題のページへ

(1)　まず，$\frac{1}{2}-2\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1-\sin^2 2\theta)\geqq 0$ であり，

$$\sin^4\theta+\cos^4\theta-\frac{1}{2}=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta-\frac{1}{2}$$
$$=\frac{1}{2}-2\sin^2\theta\cos^2\theta=\frac{1}{2}(1-\sin^2 2\theta)\geqq 0$$

よって，$\sin^4\theta+\cos^4\theta\geqq\frac{1}{2}\geqq 2\sin^2\theta\cos^2\theta$

等号は $\sin^2 2\theta=1$，すなわち $\sin 2\theta=\pm 1$ のときであり，$0\leqq\theta<2\pi$ から，

$$\theta=\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$$

(2)　(i)　$g(x)=x^2+\left(t-\frac{1}{2}\right)x-\frac{1}{2}\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+\frac{1}{16}$ に対し，$g(x)=0$ の判別式を $D(t)$ は，

$$D(t)=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+2\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^4\theta+\cos^4\theta)-\frac{1}{4}$$
$$=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\sin^2 2\theta\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta\right)-\frac{1}{4}$$
$$=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}(1-\sin^2 2\theta)^2=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\cos^2 2\theta\right)^2$$

$D(t)=0$ の解が，$t=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ より，

$$\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos^2 2\theta),\quad \beta=\frac{1}{2}(1+\cos^2 2\theta)$$

すると，$\int_\alpha^\beta D(t)\,dt=\int_\alpha^\beta(t-\alpha)(t-\beta)\,dt=-\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}=-\frac{\cos^6 2\theta}{6}$

(ii)　$f(x)=x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}t^2$ に対し，$f(x)=0$ の判別式を $D_1(t)$ とおくと，

$$D_1(t)=\frac{1}{4}-t^2=-\left(t+\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

さて，2 次方程式 $f(x)=0$，$g(x)=0$ の一方が異なる 2 つの実数解をもち，他方が虚数解をもつ条件は，

$$D(t)\cdot D_1(t)=-(t-\alpha)(t-\beta)\left(t+\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)<0\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，θ が $\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi$，$\frac{5}{4}\pi$，$\frac{7}{4}\pi$ のいずれとも異なるとき，$0<\cos^2 2\theta\leqq 1$ から，

$$-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}<\beta$$

よって，(*)の解は，$t<-\frac{1}{2}$，$\alpha<t<\frac{1}{2}$，$\beta<t$ となるので，

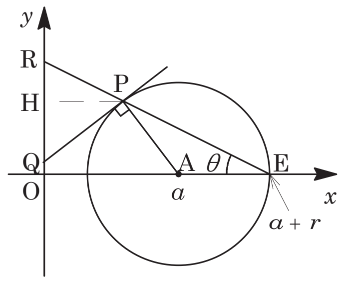
$$t<-\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}(1-\cos^2 2\theta)<t<\frac{1}{2},\quad \frac{1}{2}(1+\cos^2 2\theta)<t$$

[解 説]

ボリュームのある問題が続きます。(*)のように 4 次不等式まで出てきます。

3

問題のページへ



(1)　まず，$\angle\mathrm{AEP}=\theta$ より $\angle\mathrm{QRP}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$

また，$\angle\mathrm{APE}=\theta$，$\angle\mathrm{APQ}=\dfrac{\pi}{2}$ より，

$$\angle\mathrm{QPR}=\pi-\theta-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-\theta$$

よって，$\angle\mathrm{QRP}=\angle\mathrm{QPR}$ から，$\triangle\mathrm{PQR}$ は辺 PR を底辺とする二等辺三角形である。

さらに，二等辺三角形 PQR が正三角形になるのは，$\angle\mathrm{QRP}=\dfrac{\pi}{3}$ の場合より，

$$\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{3},\ \ \theta=\frac{\pi}{6}$$

(2)　まず，$\triangle\mathrm{PQR}$ の頂点の 1 つが原点であるのは，点 Q が原点の場合である。

さて，(1)から $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$\angle\mathrm{EAP}=\dfrac{2}{3}\pi$ となり，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，

$$x=a+r\cos\frac{2}{3}\pi=a-\frac{1}{2}r,\ \ y=r\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}r$$

すると，点 P における円 $C:(x-a)^2+y^2=r^2$ の接線の方程式は，

$$\left(a-\frac{1}{2}r-a\right)(x-a)+\frac{\sqrt{3}}{2}ry=r^2,\ \ -x+\sqrt{3}y=-a+2r$$

この接線の y 軸との交点 Q が原点に一致することより $-a+2r=0$，すなわち求める関係式は $a=2r$ である。

(3)　条件より，正三角形 PQR の外接円の半径は r なので，正弦定理を用いると，

$$\frac{\mathrm{PR}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2r,\ \ \mathrm{PR}=2r\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}r\ \cdots\cdots\cdots ①$$

さて，(1)から $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，P から y 軸に下ろした垂線の足を H とおくと，

$$\mathrm{PH}=\mathrm{PR}\cos\frac{\pi}{6},\ \ a-\frac{1}{2}r=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{PR}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$a-\dfrac{1}{2}r=\dfrac{3}{2}r$，すなわち求める関係式は $a=2r$ である。

［解 説］

円と接線，および三角形の位置関係についての標準的な問題です。いろいろな解法が考えられますが，角に着目したのが上の解です。