1

解答解説のページへ

α と β は定数で, 2 つの数列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ は次の関係式を満たすとする。

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = 4y_n - \alpha,\ \ \sum_{k=1}^{n} y_k = 9x_n - \beta \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1)　x_1 と y_1 を, α と β だけの式で表せ。

(2)　2 次の正方行列 A で, $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ がすべての自然数 n について成り立つものを求めよ。

(3)　$\alpha = 14$, $\beta = -21$ のとき, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ を求め, さらに $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ の一般項を求めよ。

2

解答解説のページへ

関数 $f(t)$ は区間 $[-1,\ 1]$ で連続で，偶関数，すなわち $f(-t)=f(t)$ であるとする。次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)\,dt=\int_{0}^{1} f(t)\,dt$ を示せ。

(2) 関数 $F(x)=-\displaystyle\int_{-1}^{1}|t-x|f(t)\,dt\quad(-1\leqq x\leqq 1)$ について

$$F'(x)=-\int_{-1}^{x} f(t)\,dt+\int_{x}^{1} f(t)\,dt,\ \ F''(x)=-2f(x)$$

を示せ。

(3) 関数 $f(x)$ は，さらに等式

$$f(x)=-\int_{-1}^{1}|t-x|f(t)\,dt\quad(-1\leqq x\leqq 1)$$

を満たすとする。このとき，$g(x)=f(x)-f(0)\cos\sqrt{2}x$ について

$$g(0)=g'(0)=0,\ \left(\frac{1}{2}\{g'(x)\}^2+g(x)^2\right)'=0$$

が成り立つことを示し，$f(x)=f(0)\cos\sqrt{2}x$ を示せ。

3

解答解説のページへ

$0<r<1$ とし，点 O を原点とする xy 平面において，3 点 O，A$(2,\ 0)$，B$(0,\ 2r)$ を頂点とする三角形 OAB と，互いに相似な 3 つの二等辺三角形 O′AB，A′OB，B′OA を考える。ここで，辺 AB，OB，OA はそれぞれの二等辺三角形の底辺であり，点 O′ は直線 AB に対して点 O と反対側に，点 A′ は第 2 象限に，点 B′ は第 4 象限に，それぞれあるとする。$t=\tan\angle\mathrm{A'OB}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　点 A′，B′ の座標を，r, t の式で表せ。

(2)　直線 AA′，および直線 BB′ の方程式を $ax+by=c$ の形で求めよ。

(3)　2 直線 AA′ と BB′ の交点を M$(x_0,\ y_0)$ とする。比 $\dfrac{y_0}{x_0}$ を r, t の式で表せ。

(4)　点 O′ の座標を r，t の式で表し，3 直線 AA′，BB′，OO′ が 1 点で交わることを示せ。

4

解答解説のページへ

A, B 2 人が次のようなゲームを行う。第三者（A, B 以外の中立的立場の者）がさいころを投げ, 1 の目が出たら A だけに 3 点, 3 の目が出たら A だけに 2 点を与え, 2 か 4 の目が出たら B だけに 2 点を与える。その他の目が出たら, A にも B にも点を与えない。この試行を何回かくり返し, 先に得点の合計が 4 点以上になった方を勝ちとする。

1 回目の試行で B が勝つ確率を p_1 とする。$n \geqq 2$ のとき, $n-1$ 回目までの試行では勝負はつかず, n 回目の試行で B が勝つ確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　p_1，p_2，p_3，p_4 を求めよ。また一般項 p_n を求めよ。

(2)　$q_n = 9p_{n+2} - 6p_{n+1} + p_n$ とするとき, $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} q_n$ を求めよ。また $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} p_n$ を求めよ。

(3)　$a = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ とするとき,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log\left|\sum_{n=1}^{k} p_n - a\right|$$

を求めよ。ただし, 必要ならば, $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{3^k} = 0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x} = 0$ を用いてよい。

1

問題のページへ

(1) 条件より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = 4y_n - \alpha$ ……①，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} y_k = 9x_n - \beta$ ……②

①②に $n=1$ を代入すると，$x_1 = 4y_1 - \alpha$ ……③，$y_1 = 9x_1 - \beta$ ……④

③④より，$x_1 = 4(9x_1 - \beta) - \alpha$ となり，$x_1 = \dfrac{\alpha + 4\beta}{35}$

$$y_1 = 9 \cdot \frac{\alpha + 4\beta}{35} - \beta = \frac{9\alpha + \beta}{35}$$

(2) ①より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k = (4y_{n+1} - \alpha) - (4y_n - \alpha)$ となり，

$$x_{n+1} = 4y_{n+1} - 4y_n \text{ ………⑤}$$

②より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} y_k - \sum_{k=1}^{n} y_k = (9x_{n+1} - \beta) - (9x_n - \beta)$ となり，

$$y_{n+1} = 9x_{n+1} - 9x_n \text{ ………⑥}$$

⑤⑥より，$x_{n+1} = 4(9x_{n+1} - 9x_n) - 4y_n$，$x_{n+1} = \dfrac{1}{35}(36x_n + 4y_n)$

$$y_{n+1} = \frac{9}{35}(36x_n + 4y_n) - 9x_n = \frac{1}{35}(9x_n + 36y_n)$$

よって，$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{35}\begin{pmatrix} 36 & 4 \\ 9 & 36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ から，$A = \dfrac{1}{35}\begin{pmatrix} 36 & 4 \\ 9 & 36 \end{pmatrix}$

(3) $\alpha = 14$，$\beta = -21$ のとき, (1)より，$x_1 = \dfrac{14 - 84}{35} = -2$，$y_1 = \dfrac{126 - 21}{35} = 3$ となり，

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} 36 & 4 \\ 9 & 36 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{35}\begin{pmatrix} -60 \\ 90 \end{pmatrix} = \frac{6}{7}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

すると，$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \left(\dfrac{6}{7}\right)^{n-1}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ と推測でき，これを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$ のとき　明らかに成立する。

(ii) $n=k$ のとき　成立を仮定すると，

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = A\left(\frac{6}{7}\right)^{k-1}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \left(\frac{6}{7}\right)^{k-1} \cdot \frac{6}{7}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \left(\frac{6}{7}\right)^{k}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

よって，$n = k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$x_n = -2 \cdot \left(\dfrac{6}{7}\right)^{n-1}$，$y_n = 3 \cdot \left(\dfrac{6}{7}\right)^{n-1}$

[解 説]

漸化式の典型題の 1 つで，x_2，y_2 を導くプロセスから一般項を推測するタイプです。明らかでも，数学的帰納法による証明は書いておくべきでしょう。

© 電送数学舎 2009

2

問題のページへ

(1)　$s=-t$ とおくと，$\dfrac{ds}{dt}=-1$ であり，$t=-1\to 0$ のとき $s=1\to 0$ となる。

また，$f(t)$ は区間 $[-1,\ 1]$ で連続で，$f(-t)=f(t)$ が成り立つので，

$$\int_{-1}^{0} f(t)\,dt=\int_{1}^{0} f(-s)(-ds)=\int_{0}^{1} f(-s)\,ds=\int_{0}^{1} f(s)\,ds=\int_{0}^{1} f(t)\,dt$$

(2)　$-1\leqq x\leqq 1$ のとき，条件より，

$$F(x)=-\int_{-1}^{1}|t-x|f(t)\,dt=-\int_{-1}^{x}-(t-x)f(t)\,dt-\int_{x}^{1}(t-x)f(t)\,dt$$

$$=\int_{-1}^{x} tf(t)\,dt-x\int_{-1}^{x} f(t)\,dt-\int_{x}^{1} tf(t)\,dt+x\int_{x}^{1} f(t)\,dt$$

$$F'(x)=xf(x)-\int_{-1}^{x} f(t)\,dt-xf(x)+xf(x)+\int_{x}^{1} f(t)\,dt-xf(x)$$

$$=-\int_{-1}^{x} f(t)\,dt+\int_{x}^{1} f(t)\,dt$$

$$F''(x)=-f(x)-f(x)=-2f(x)$$

(3)　条件より，$f'(x)=-\displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)\,dt+\int_{x}^{1} f(t)\,dt$ ……①，$f''(x)=-2f(x)$ ……②

さて，$g(x)=f(x)-f(0)\cos\sqrt{2}x$ に対して，

$$g'(x)=f'(x)+\sqrt{2}f(0)\sin\sqrt{2}x,\quad g''(x)=f''(x)+2f(0)\cos\sqrt{2}x$$

すると，$g(0)=f(0)-f(0)\cos 0=0$，$g'(0)=f'(0)+\sqrt{2}f(0)\sin 0=f'(0)$

(1)と①から，$f'(0)=-\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)\,dt+\int_{0}^{1} f(t)\,dt=0$ となり，$g'(0)=0$

さらに，$G(x)=\dfrac{1}{2}\{g'(x)\}^2+g(x)^2$ とおき，②を利用すると，

$$G'(x)=\left(\frac{1}{2}\{g'(x)\}^2+g(x)^2\right)'=g'(x)g''(x)+2g(x)g'(x)$$

$$=g'(x)\left\{f''(x)+2f(0)\cos\sqrt{2}x+2f(x)-2f(0)\cos\sqrt{2}x\right\}$$

$$=g'(x)\{f''(x)+2f(x)\}=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

③より, C を定数として，$G'(x)=C$，$\dfrac{1}{2}\{g'(x)\}^2+g(x)^2=C$

さらに，$g(0)=g'(0)=0$ から，$C=0$ となり，

$$\frac{1}{2}\{g'(x)\}^2+g(x)^2=0$$

そこで，$\{g'(x)\}^2\geqq 0$，$g(x)^2\geqq 0$ から，$g'(x)=g(x)=0$ となり，

$$f(x)-f(0)\cos\sqrt{2}x=0,\quad f(x)=f(0)\cos\sqrt{2}x$$

[解　説]

ていねいな誘導つきの微分方程式の解を求める問題です。

© 電送数学舎 2009

3

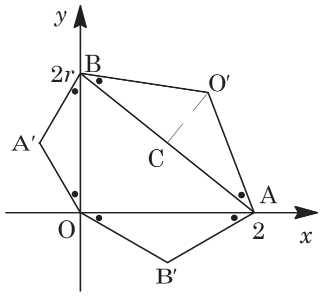
問題のページへ

(1)　$A'(x_1,\ y_1)$，$B'(x_2,\ y_2)$，$\angle A'OB=\theta$ とおくと，

$$x_1=-r\tan\theta=-rt,\quad y_1=r$$

$$x_2=1,\quad y_2=-\tan\theta=-t$$

よって，$A'(-rt,\ r)$，$B'(1,\ -t)$



(2)　$\overrightarrow{AA'}=(-rt-2,\ r)$ より，直線 AA′ の法線ベクトルの成分を $(r,\ rt+2)$，$\overrightarrow{BB'}=(1,\ -2r-t)$ より，直線 BB′ の法線ベクトルの成分を $(2r+t,\ 1)$ とすることができる。これより，直線 AA′，BB′ の方程式は，

$$AA' : r(x-2)+(rt+2)y=0,\ rx+(rt+2)y=2r\ \cdots\cdots\cdots①$$

$$BB' : (2r+t)x+(y-2r)=0,\ (2r+t)x+y=2r\ \cdots\cdots\cdots②$$

(3)　2 直線 AA′ と BB′ の交点が $M(x_0,\ y_0)$ より，①②から，

$$rx_0+(rt+2)y_0=2r\ \cdots\cdots\cdots③,\quad (2r+t)x_0+y_0=2r\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$(-r-t)x_0+(rt+1)y_0=0$，$(r+t)x_0=(rt+1)y_0$ となり，

$$\frac{y_0}{x_0}=\frac{r+t}{rt+1}$$

(4)　まず，辺 AB の中点を C とすると $C(1,\ r)$ となり，$AC=\sqrt{1+r^2}$ から，

$$CO'=AC\tan\theta=t\sqrt{1+r^2}$$

また，$\overrightarrow{AB}=-2(1,\ -r)$ より，直線 AB の法線ベクトルの成分を $(r,\ 1)$ とすることができ，

$$\overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CO'}=(1,\ r)+t\sqrt{1+r^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2+1}}(r,\ 1)=(rt+1,\ r+t)$$

これより，$O'(rt+1,\ r+t)$ となり，直線 OO′ の方程式は $y=\dfrac{r+t}{rt+1}x$ である。

よって，(3)から，直線 OO′ 上に 2 直線 AA′ と BB′ の交点 $M(x_0,\ y_0)$ が存在することになる。すなわち，3 直線 AA′，BB′，OO′ は 1 点で交わる。

［解 説］

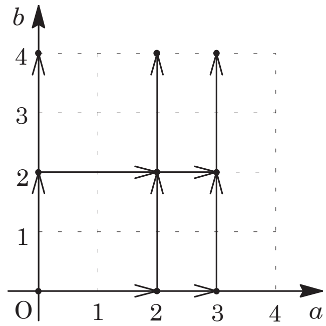
座標平面上の図形を題材とした頻出題です。ベクトルの利用によって，計算量を減らすことがポイントです。

© 電送数学舎 2009

4

問題のページへ

(1) A の得点を a, B の得点を b とするとき, B が勝つ場合の点$(a,\ b)$の推移には 5 つのルートがある。



Ⅰ　$(0,\ 0)\to(0,\ 2)\to(0,\ 4)$

Ⅱ　$(0,\ 0)\to(0,\ 2)\to(2,\ 2)\to(2,\ 4)$

Ⅲ　$(0,\ 0)\to(0,\ 2)\to(3,\ 2)\to(3,\ 4)$

Ⅳ　$(0,\ 0)\to(2,\ 0)\to(2,\ 2)\to(2,\ 4)$

Ⅴ　$(0,\ 0)\to(3,\ 0)\to(3,\ 2)\to(3,\ 4)$

また, a 軸方向に 2 または 3 進む確率は$\dfrac{1}{3}$, b 軸方向に 2 だけ進む確率は$\dfrac{1}{3}$, さらに動かない確率は$\dfrac{1}{3}$である。

さて, 1 回目の試行で B が勝つ場合はないので, $p_1=0$ である。

2 回目の試行で B が勝つ場合はルートⅠのみより, $p_2=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$ である。

3 回目の試行で B が勝つ場合, その確率は, ルートⅠでは$2!\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{27}$, ルートⅡ～Ⅴでは$2!\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{27}$となるので, $p_3=\dfrac{2}{27}+\dfrac{2}{27}=\dfrac{4}{27}$ である。

4 回目の試行で B が勝つ場合, その確率は, ルートⅠでは$\dfrac{3!}{2!}\cdot\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{27}$, ルートⅡ～Ⅴでは$3!\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{27}$となるので, $p_4=\dfrac{1}{27}+\dfrac{2}{27}=\dfrac{1}{9}$ である。

また, n 回目$(n\geqq 3)$の試行で B が勝つ場合, その確率は,

(i)　ルートⅠのとき　$\dfrac{(n-1)!}{(n-2)!}\cdot\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}\times\dfrac{1}{3}=(n-1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

(ii)　ルートⅡ～Ⅴのとき　$\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-3}\times\dfrac{1}{3}=(n-1)(n-2)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

(i)(ii)より, $p_n=(n-1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+(n-1)(n-2)\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=(n-1)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

なお, この値は, $n=1,\ 2$ のときも満たされている。

(2) 条件から, $q_n=9p_{n+2}-6p_{n+1}+p_n$ ……①より,

$$q_n=9(n+1)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}-6n^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+(n-1)^2\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$=(n+1)^2\left(\frac{1}{3}\right)^n-2n^2\left(\frac{1}{3}\right)^n+(n-1)^2\left(\frac{1}{3}\right)^n=2\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

よって, $\displaystyle\sum_{n=1}^{k}q_n=\frac{\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^k\right\}}{1-\frac{1}{3}}=1-\left(\frac{1}{3}\right)^k$ ………②

また, ①において, $n=1$ から $n=k$ まで和をとると,

© 電送数学舎 2009

$$\sum_{n=1}^{k} q_n = 9\sum_{n=1}^{k} p_{n+2} - 6\sum_{n=1}^{k} p_{n+1} + \sum_{n=1}^{k} p_n$$

$$= 9\left(\sum_{n=1}^{k} p_n - p_1 - p_2 + p_{k+1} + p_{k+2}\right) - 6\left(\sum_{n=1}^{k} p_n - p_1 + p_{k+1}\right) + \sum_{n=1}^{k} p_n$$

$$= 4\sum_{n=1}^{k} p_n - 3p_1 - 9p_2 + 3p_{k+1} + 9p_{k+2} \cdots\cdots\cdots ③$$

②③より，$4\sum_{n=1}^{k} p_n = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^k + 3p_1 + 9p_2 - 3p_{k+1} - 9p_{k+2}$

$$= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^k + 3\times 0 + 9\times\frac{1}{9} - 3k^2\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1} - 9(k+1)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{k+2}$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^k + 1 - k^2\left(\frac{1}{3}\right)^k - (k+1)^2\left(\frac{1}{3}\right)^k = 2 - 2(k^2+k+1)\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

よって，$\sum_{n=1}^{k} p_n = \frac{1}{2} - \frac{k^2+k+1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^k$

(3)　(2)より，$\lim_{k\to\infty}\frac{k^2}{3^k} = 0$を用いて，$a = \sum_{n=1}^{\infty} p_n = \lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{2} - \frac{k^2+k+1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^k\right\} = \frac{1}{2}$

このとき，$\left|\sum_{n=1}^{k} p_n - a\right| = \frac{k^2+k+1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^k$より，

$$\frac{1}{k}\log\left|\sum_{n=1}^{k} p_n - a\right| = \frac{1}{k}\left(\log\frac{k^2+k+1}{2} - k\log 3\right) = \frac{\log(k^2+k+1)}{k} - \frac{\log 2}{k} - \log 3$$

ここで，$\frac{2\log k}{k} = \frac{\log k^2}{k} < \frac{\log(k^2+k+1)}{k} < \frac{\log(k+1)^2}{k} = \frac{2\log(k+1)}{k+1}\cdot\frac{k+1}{k}$から，

$\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = 0$を用いると，$\lim_{k\to\infty}\frac{\log(k^2+k+1)}{k} = 0$となり，

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\left|\sum_{n=1}^{k} p_n - a\right| = -\log 3$$

[解 説]

(1)は確率の問題ですが，(2)以降は数列の計算問題です。たくさんの問題が詰まっており，計算量も半端ではありません。なお，(1)で 5 つのルートを個別に計算していくと，B5 用紙 2 枚では収まりません。

© 電送数学舎 2009