1

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1) $x>0$, $x\neq 1$ とする。方程式 $\log_2 x+2\log_x 2=3$ を解け。

(2) $x>0$, $x\neq 2$，$y>0$ とする。次の連立方程式を解け。

$$\log_{\frac{x}{2}} y=2,\ \ xy=16$$

(3) $x>0$, $x\neq 2$，$y>0$ とする。次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\log_{\frac{x}{2}} y<2,\ \ xy<16$$

2

解答解説のページへ

a を正の定数とする。2 つの放物線 C_1 : $y=x^2$ と C_2 : $y=(x-2)^2+4a$ の交点を P とする。次の問いに答えよ。

(1) 放物線 C_1 上の点 $\mathrm{Q}(t,\ t^2)$ における接線の方程式を求めよ。さらに，その接線のうち C_2 に接するものを l とする。l の方程式を求めよ。

(2) 点 P を通り y 軸に平行な直線を m とする。l と m の交点を R とするとき，線分 PR の長さを求めよ。

(3) 直線 l, m と放物線 C_1 で囲まれた図形の面積を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

O を原点とする座標平面上の円 $C: x^2+y^2=1$ と直線 $x+2y=1$ の交点のうち, x 座標の小さい方を P, 他方を Q とする。点 P, Q における円 C の接線をそれぞれ l, m とする。次の問いに答えよ。

(1) P, Q の座標を求めよ。また, l と m の交点 R の座標を求めよ。

(2) 線分 OR と C の交点を S とする。S の座標を求めよ。また, $\triangle$QRS の面積を求めよ。

(3) $\angle\mathrm{PQS}=\angle\mathrm{RQS}$ であることを示せ。

1

問題のページへ

(1) $x>0$, $x \neq 1$ のとき，$\log_2 x + 2\log_x 2 = 3$ に対して，$\log_2 x + \dfrac{2}{\log_2 x} = 3$ となり，

$$(\log_2 x)^2 - 3\log_2 x + 2 = 0,\ (\log_2 x - 1)(\log_2 x - 2) = 0$$

よって，$\log_2 x = 1,\ 2$ より，$x = 2,\ 4$

(2) $x>0$, $x \neq 2$, $y>0$ のとき，$\log_{\frac{x}{2}} y = 2$ ……①，$xy = 16$ ……②に対して，

①より，$y = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}x^2$ となり，②に代入すると，

$$\frac{1}{4}x^3 = 16,\ x^3 = 64$$

すると，$x = 4$ となり，②から，$y = 4$

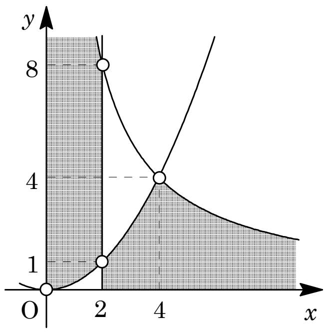
(3) $x>0$, $x \neq 2$, $y>0$ のとき，$\log_{\frac{x}{2}} y < 2$ ……③，$xy < 16$ ……④に対して，③より，

(i) $\dfrac{x}{2} > 1\ (x>2)$ のとき　$y < \dfrac{1}{4}x^2$

(ii) $0 < \dfrac{x}{2} < 1\ (0<x<2)$ のとき　$y > \dfrac{1}{4}x^2$

④より，$y < \dfrac{16}{x}$

よって，連立不等式③④の表す領域は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。



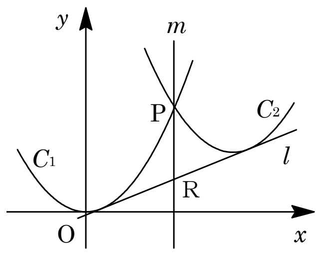
［解 説］

対数方程式・不等式の基本問題です。

2

問題のページへ

(1)　$C_1 : y = x^2$ ……①，$C_2 : y = (x-2)^2 + 4a$ ……②に対して，①上の点 $\mathrm{Q}(t,\ t^2)$ における接線の方程式は，$y' = 2x$ より，



$$y - t^2 = 2t(x-t),\quad y = 2tx - t^2 \cdots\cdots\cdots ③$$

さて，②と③を連立すると，$2tx - t^2 = (x-2)^2 + 4a$

$$x^2 - 2(t+2)x + t^2 + 4a + 4 = 0 \cdots\cdots\cdots ④$$

④が重解をもつことより，$D/4 = (t+2)^2 - (t^2 + 4a + 4) = 0$

これより，$t = a$ となり，③から，直線 $l : y = 2ax - a^2$ ………⑤

(2)　①②を連立して，$x^2 = (x-2)^2 + 4a$ より，$x = a+1$

これより，$\mathrm{P}(a+1,\ (a+1)^2)$ となり，直線 $m : x = a+1$ ………⑥

⑤⑥の交点は，$y = 2a(a+1) - a^2 = a^2 + 2a$ から，$\mathrm{R}(a+1,\ a^2 + 2a)$ となり，

$$\mathrm{PR} = (a+1)^2 - (a^2 + 2a) = 1$$

(3)　直線 l, m と放物線 C_1 で囲まれた図形の面積を S とすると，

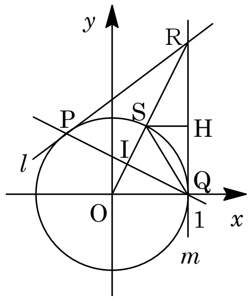
$$S = \int_a^{a+1} (x^2 - 2ax + a^2)\,dx = \int_a^{a+1} (x-a)^2\,dx = \frac{1}{3}\Big[(x-a)^3\Big]_a^{a+1} = \frac{1}{3}$$

［解　説］

センター試験にそのまま出題されても不思議のない内容の微積分の総合問題です。

3

問題のページへ



(1)　$C: x^2+y^2=1$……①，直線 $x+2y=1$……②を連立して，

$$(1-2y)^2+y^2=1,\ 5y^2-4y=0$$

よって，$y=0,\ \dfrac{4}{5}$ となり，$\mathrm{P}\left(-\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$，$\mathrm{Q}(1,\ 0)$

点 P における円 C の接線 l は，$-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y=1$

$$-3x+4y=5\text{………③}$$

点 Q における円 C の接線 m は，$x=1$………④

③④の交点 R の座標は，$\mathrm{R}(1,\ 2)$ となる。

(2)　$\mathrm{OS}=1$ から，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OR}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|}=\dfrac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}(1,\ 2)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,\ 2)$ となり，$\mathrm{S}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

また, S から $m: x=1$ に下ろした垂線 SH の長さは，$\mathrm{SH}=1-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ から，

$$\triangle\mathrm{QRS}=\frac{1}{2}\cdot 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

(3)　S から $\mathrm{PQ}: x+2y-1=0$ に下ろした垂線 SI の長さは,

$$\mathrm{SI}=\frac{\left|\dfrac{1}{\sqrt{5}}+2\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}}-1\right|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5-\sqrt{5}}{5}=1-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

よって，$\mathrm{SI}=\mathrm{SH}$ から，$\angle\mathrm{PQS}=\angle\mathrm{RQS}$ である。

［解 説］

前問と同じ傾向の問題です。(3)は(2)との繋がりで考えると，上のような解法になるでしょう。