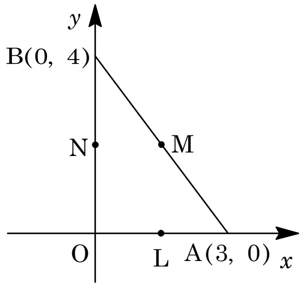
1

解答解説のページへ

座標平面上に点 A$(3,\ 0)$，B$(0,\ 4)$ をとる。また，原点 O と A の中点を L, A と B の中点を M, B と O の中点を N とする。さらに，△OAB の内接円を C_1，△LMN の外接円を C_2 とする。次の問いに答えよ。



(1)　円 C_1 の半径 r_1 と中心 P_1 の座標を求めよ。

(2)　円 C_2 の半径 r_2 と中心 P_2 の座標を求めよ。

(3)　円 C_1 と円 C_2 が接することを示せ。

2

解答解説のページへ

実数 x に対して，関数 $f(x)$ を，$f(x)=\int_0^2 |t-x|\,dt$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=f(x)$ を求め，そのグラフをかけ。

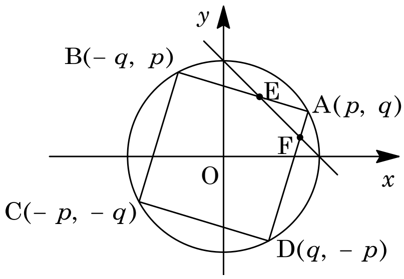
(2) $y=f(x)$ の接線で傾きが 1 のものを l とする。l の方程式を求めよ。

(3) 直線 $x=-1$，接線 l，曲線 $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

3

解答解説のページへ

座標平面上に $A(p,\ q)$，$B(-q,\ p)$，$C(-p,\ -q)$，$D(q,\ -p)$ を頂点とする正方形がある。ただし，$p>0$，$q>0$，$p^2+q^2=1$ とする。また, 直線 AB, AD が直線 $x+y=1$ と交わる点をそれぞれ $E(r,\ s)$，$F(t,\ u)$ とする。次の問いに答えよ。



(1)　直線 AB, AD の方程式を p, q を用いて表せ。

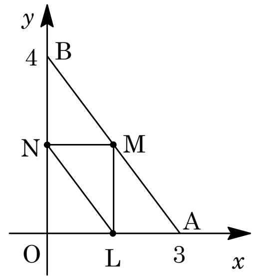
(2)　r, s, t, u を p, q を用いて表せ。

(3)　$k=p+q$ とおくとき, pq を k の式で表せ。また，$k \leqq \sqrt{2}$ を示せ。

(4)　$st-ru$ を k の式で表せ。また，$st-ru$ の最小値を求めよ。

1

問題のページへ



(1) 直角三角形 OAB の内接円 C_1 の半径を r_1 とすると，中心 $P_1(r_1,\ r_1)$ となる。

ここで，$OA=3$，$OB=4$，$AB=5$ から，

$$(3-r_1)+(4-r_1)=5,\ r_1=1$$

すると，$P_1(1,\ 1)$ である。

(2) 点 L, M, N は，それぞれ線分 OA, AB, OB の中点より，$L\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$，$M\left(\frac{3}{2},\ 2\right)$，$N(0,\ 2)$ である。

これより，△LMN は直角三角形となり，外接円 C_2 の中心は斜辺 LN の中点であるので，$P_2\left(\frac{3}{4},\ 1\right)$ となる。また，直径が LN から，半径 r_2 は，

$$r_2=\frac{LN}{2}=\frac{AB}{4}=\frac{5}{4}$$

(3) 円 C_1 と円 C_2 の中心間距離は，$P_1P_2=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

また，$r_2-r_1=\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}$ となり，$P_1P_2=r_2-r_1$ である。

よって，円 C_1 は円 C_2 に内接している。

［解　説］

2 つの三角形が，ともに直角三角形であることに注目すると，計算はほとんど必要ありません。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=\int_0^2|t-x|dt$ に対して，

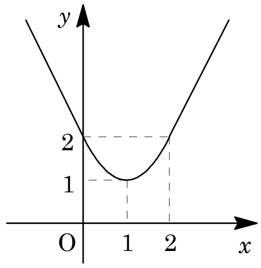
(i)　$x<0$ のとき　$f(x)=\int_0^2(t-x)dt=\left[\frac{t^2}{2}-xt\right]_0^2=2-2x$

(ii)　$0\leqq x<2$ のとき

$$f(x)=\int_0^x-(t-x)dt+\int_x^2(t-x)dt=\left[-\frac{t^2}{2}+xt\right]_0^x+\left[\frac{t^2}{2}-xt\right]_x^2$$
$$=-\frac{x^2}{2}+x^2+\frac{1}{2}(4-x^2)-x(2-x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$$

(iii)　$x\geqq 2$ のとき　$f(x)=\int_0^2-(t-x)dt=-2+2x$

(i)～(iii)より，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



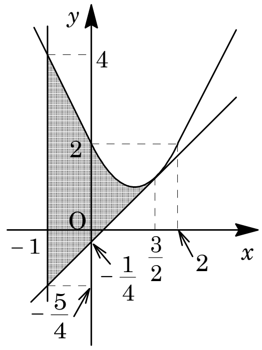
(2)　$0\leqq x<2$ において，$f'(x)=1$ とおくと，

$2x-2=1$，$x=\frac{3}{2}$

これより，接点は $\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{4}\right)$ となり，接線 l の方程式は，

$y-\frac{5}{4}=x-\frac{3}{2}$，$y=x-\frac{1}{4}$

(3)　直線 $x=-1$，接線 l，曲線 $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積 S は，



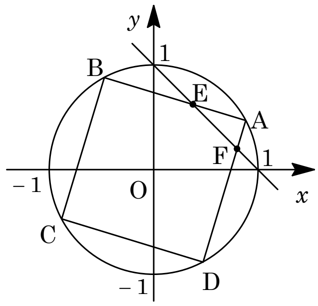
$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}+\frac{21}{4}\right)\cdot 1+\int_0^{\frac{3}{2}}\left(x^2-2x+2-x+\frac{1}{4}\right)dx$$
$$=\frac{15}{4}+\int_0^{\frac{3}{2}}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2dx=\frac{15}{4}+\frac{1}{3}\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^3\right]_0^{\frac{3}{2}}$$
$$=\frac{15}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{27}{8}=\frac{39}{8}$$

［解 説］

絶対値のついた関数の定積分です。基本的ですが，出来不出来がはげしい問題です。なお, (3)の設問で, y 軸の左側の部分は台形の面積公式を利用しています。

3

問題のページへ



(1)　$A(p,\ q)$，$B(-q,\ p)$，$C(-p,\ -q)$，$D(q,\ -p)$を頂点とする正方形に対し，$\overrightarrow{AD}=(q-p,\ -p-q)$から，直線 AB の方程式は，$p^2+q^2=1$を用いて，

$$(q-p)(x-p)+(-p-q)(y-q)=0$$

$$-(p-q)x-(p+q)y+1=0 \cdots\cdots\text{①}$$

$\overrightarrow{AB}=(-q-p,\ p-q)$から，直線 AD の方程式は，

$$(-q-p)(x-p)+(p-q)(y-q)=0$$

$$-(p+q)x+(p-q)y+1=0 \cdots\cdots\text{②}$$

(2)　直線$x+y=1$ ……③に対して，①③より，$2qx=p+q-1$となり，

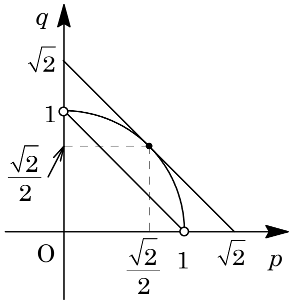
$$x=\frac{p+q-1}{2q},\quad y=1-\frac{p+q-1}{2q}=\frac{-p+q+1}{2q}$$

点$E(r,\ s)$の座標は，$r=\dfrac{p+q-1}{2q}$，$s=\dfrac{-p+q+1}{2q}$

また，②③より，$2py=p+q-1$となり，

$$y=\frac{p+q-1}{2p},\quad x=1-\frac{p+q-1}{2p}=\frac{p-q+1}{2p}$$

点$F(t,\ u)$の座標は，$t=\dfrac{p-q+1}{2p}$，$u=\dfrac{p+q-1}{2p}$



(3)　まず，$2pq=(p+q)^2-(p^2+q^2)=k^2-1$より，

$$pq=\frac{1}{2}(k^2-1)$$

また，$p>0$，$q>0$，$p^2+q^2=1$を図示すると，右図のようになり，$k=p+q$のとりうる値の範囲は，

$$1<k\leqq\sqrt{2}$$

(4)　(2)から，$st-ru=\dfrac{(-p+q+1)(p-q+1)}{4pq}-\dfrac{(p+q-1)(p+q-1)}{4pq}$

$$=\frac{1-(p-q)^2-(p+q-1)^2}{4pq}=\frac{-2(p^2+q^2)+2(p+q)}{4pq}$$

$$=\frac{-2+2k}{2(k^2-1)}=\frac{2(k-1)}{2(k-1)(k+1)}=\frac{1}{k+1}$$

(3)より，$1<k\leqq\sqrt{2}$なので，$\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{k+1}\geqq\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$

よって，$st-ru$は，$p=q=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$のとき最小値$\sqrt{2}-1$をとる。

［解　説］

特に工夫もせずに解きましたが，文系としては計算が多めです。