

1

解答解説のページへ

座標平面上に点  $A(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ ,  $B\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ ,  $C(\cos\theta, -\sin\theta)$  がある。ただし,  $0 < \theta < \pi$  とする。次の問いに答えよ。

- (1) 直線  $AC$  と  $x$  軸の交点を  $P$  とする。  $P$  の座標を  $\theta$  で表せ。
- (2)  $\triangle ABC$  の面積  $S(\theta)$  を求めよ。
- (3) 面積  $S(\theta)$  の最大値とそのときの  $\theta$  の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

行列  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  に対して,  $B = P^{-1}AP$  とおく。また,  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して,  $a_n, b_n$  を,  $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$  で定める。次の問いに答えよ。

- (1)  $P^{-1}$  および  $B$  を求めよ。
- (2)  $a_n, b_n$  を求めよ。
- (3) 実数  $x$  を超えない最大の整数を  $[x]$  で表す。このとき,  $[(2+\sqrt{3})^n] = a_n - 1$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) を示せ。また,  $c_n = (2+\sqrt{3})^n - [(2+\sqrt{3})^n]$  とするとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$  の値を求めよ。

**3**

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

- (1)  $x \geq 0$  のとき, 不等式  $1 - \cos \frac{x}{2} \leq \frac{x^2}{8}$  を示せ。
- (2)  $I_n = \int_0^2 x^n e^x dx$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) とおく。  $I_1$  の値を求めよ。さらに, 等式  $I_n = 2^n e^2 - n I_{n-1}$  ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ) を示せ。
- (3)  $I_2, I_3, I_4$  および  $I_5$  の値を求めよ。
- (4) 不等式  $\int_0^4 \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) e^{\sqrt{x}} dx \leq -2e^2 + 30$  を示せ。

4

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

- (1) 自然数  $n$  に対して,  $\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$  を求めよ。また,  $\frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n < \frac{1}{n}$  を示せ。
- (2) 2 以上の自然数  $n$  に対して,  $\log(n+1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < 1 + \log n$  を示せ。
- (3) 2 以上の自然数  $n$  に対して,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{e e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{3}} \dots e^{\frac{1}{k}}} > \frac{1}{e} \log(n+1)$  を示せ。

1

問題のページへ

- (1) 2点  $A(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ ,  $C(\cos\theta, -\sin\theta)$  に対して,

$$\overrightarrow{CA} = (\cos\theta, 3\sin\theta)$$

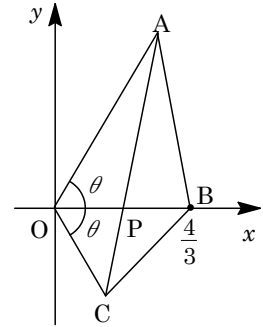
直線  $AC$  は、法線ベクトルの成分を  $(3\sin\theta, -\cos\theta)$  とおくことができるので、その方程式は、

$$3\sin\theta(x - \cos\theta) - \cos\theta(y + \sin\theta) = 0$$

$$3x\sin\theta - y\cos\theta - 4\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$x \text{ 軸の交点 } P \text{ は、} 0 < \theta < \pi \text{ より、} x = \frac{4\sin\theta\cos\theta}{3\sin\theta} = \frac{4}{3}\cos\theta$$

よって、 $P\left(\frac{4}{3}\cos\theta, 0\right)$  である。



- (2)  $BP = \frac{4}{3}(1 - \cos\theta)$  より、 $\triangle ABC$  の面積  $S(\theta)$  は、

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}(1 - \cos\theta)(2\sin\theta + \sin\theta) = 2\sin\theta(1 - \cos\theta)$$

- (3)  $S'(\theta) = 2\cos\theta(1 - \cos\theta) + 2\sin^2\theta$   
 $= 2(1 - \cos\theta)(1 + 2\cos\theta)$

$S(\theta)$  の増減は右表のようになり、 $\theta = \frac{2}{3}\pi$

のとき、 $S(\theta)$  は最大値  $\frac{3}{2}\sqrt{3}$  をとる。

$\theta$	0	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	$\pi$
$S'(\theta)$	0	+	0	-	
$S(\theta)$		$\nearrow$	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$\searrow$	

### [解説]

微分法を用いた最大・最小問題ですが、誘導が細かいため、計算だけを注意深く実行すれば結論に到達できます。

2

問題のページへ

$$(1) P = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{より, } P^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \text{となり,}$$

$$\begin{aligned} B &= P^{-1}AP = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & 3+2\sqrt{3} \\ -2+\sqrt{3} & -3+2\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 6+4\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -6+4\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(2) A = PBP^{-1} \text{より, } A^n = (PBP^{-1})^n = PB^nP^{-1} \text{となり,}$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = PB^nP^{-1} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2PB^nP^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2+\sqrt{3})^n & 0 \\ 0 & (2-\sqrt{3})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2+\sqrt{3})^n & 0 \\ 0 & (2-\sqrt{3})^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2+\sqrt{3})^n \\ -(2-\sqrt{3})^n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \sqrt{3}(2+\sqrt{3})^n + \sqrt{3}(2-\sqrt{3})^n \\ (2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{よって, } a_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \{ (2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n \}$$

$$(3) 0 < 2-\sqrt{3} < 1 \text{より, } a_n - 1 < a_n - (2-\sqrt{3})^n < a_n \text{となる。}$$

すると,  $a_n$  は明らかに整数なので, (2)より,

$$[(2+\sqrt{3})^n] = [a_n - (2-\sqrt{3})^n] = a_n - 1$$

$$\text{また, } c_n = (2+\sqrt{3})^n - [(2+\sqrt{3})^n] = a_n - (2-\sqrt{3})^n - (a_n - 1) = 1 - (2-\sqrt{3})^n$$

$$\text{よって, } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \{1 - (2-\sqrt{3})^n\} = 1$$

### [解説]

行列の  $n$  乗についての有名問題です。ただ, (2)の設問では,  $A^n$  を求める必要はありません。

3

問題のページへ

$$(1) \quad x \geq 0 \text{ のとき } t = \frac{x}{2} \geq 0 \text{ となり, } f(t) = \frac{t^2}{2} - 1 + \cos t \text{ とおくと, } f'(t) = t - \sin t \geq 0$$

$$\text{よって, } f(t) \geq f(0) = 0 \text{ となり, } \frac{t^2}{2} \geq 1 - \cos t \text{ から, } 1 - \cos \frac{x}{2} \leq \frac{x^2}{8}$$

$$(2) \quad I_1 = \int_0^2 x e^x dx = [x e^x]_0^2 - \int_0^2 e^x dx = 2e^2 - (e^2 - 1) = e^2 + 1$$

$$\text{また, } n \geq 2 \text{ で, } I_n = \int_0^2 x^n e^x dx = [x^n e^x]_0^2 - \int_0^2 n x^{n-1} e^x dx = 2^n e^2 - n I_{n-1}$$

$$(3) \quad (2) \text{ より, } I_2 = 2^2 e^2 - 2 I_1 = 4e^2 - 2(e^2 + 1) = 2(e^2 - 1)$$

$$I_3 = 2^3 e^2 - 3 I_2 = 8e^2 - 6(e^2 - 1) = 2(e^2 + 3)$$

$$I_4 = 2^4 e^2 - 4 I_3 = 16e^2 - 8(e^2 + 3) = 8(e^2 - 3)$$

$$I_5 = 2^5 e^2 - 5 I_4 = 32e^2 - 40(e^2 - 3) = -8(e^2 - 15)$$

$$(4) \quad I = \int_0^4 \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) e^{\sqrt{x}} dx \text{ とすると, (1) より, } I \leq \int_0^4 \frac{x^2}{8} e^{\sqrt{x}} dx \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

ここで,  $\sqrt{x} = u$  とおくと  $dx = 2u du$  となり,

$$\int_0^4 \frac{x^2}{8} e^{\sqrt{x}} dx = \int_0^2 \frac{u^4}{8} e^u \cdot 2u du = \frac{1}{4} \int_0^2 u^5 e^u du = \frac{1}{4} I_5 = -2e^2 + 30 \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{ より, } \int_0^4 \left(1 - \cos \frac{x}{2}\right) e^{\sqrt{x}} dx \leq -2e^2 + 30$$

### [解説]

構えなくなる問題ですが, あまりにも誘導が丁寧すぎて, (4)では肩透かしを食らったような気分になってしまいます。

4

問題のページへ

$$(1) \text{ まず, } \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = [\log x]_n^{n+1} = \log(n+1) - \log n$$

ここで, 自然数  $n$  に対し,  $n \leq x \leq n+1$  のとき,  $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$  となり,

$$\frac{1}{n+1} \int_n^{n+1} dx < \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx < \frac{1}{n} \int_n^{n+1} dx, \quad \frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log n < \frac{1}{n}$$

(2) 2 以上の自然数  $n$  に対して, (1) より,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \sum_{k=1}^n \{ \log(k+1) - \log k \} = \log(n+1) - \log 1 = \log(n+1) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} < \sum_{k=1}^{n-1} \{ \log(k+1) - \log k \} = \log n - \log 1 = \log n \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ の両辺に } 1 \text{ を加えると, } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} < 1 + \log n \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{3} \text{ より, } \log(n+1) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < 1 + \log n$$

(3) (2) より, 2 以上の自然数  $n$  に対して, (3) より,

$$ee^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{3}} \cdots e^{\frac{1}{n}} = e^{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}} < e^{1 + \log n} = en$$

さらに, (1) を適用して,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{ee^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{3}} \cdots e^{\frac{1}{k}}} > \sum_{k=1}^n \frac{1}{ek} = \frac{1}{e} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \frac{1}{e} \log(n+1)$$

### [解説]

有名問題です。ただ, 第3問と同じく, 丁寧すぎる誘導がついています。