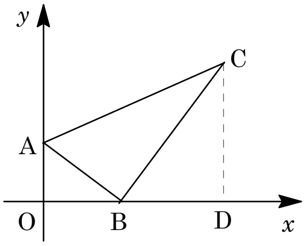
1

解答解説のページへ

O を原点とする座標平面に点 $A(0,\ \sin\theta)$，$B(\cos\theta,\ 0)$ がある。ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。また，点 C を $AC=2$，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$ を満たす第 1 象限の点とする。さらに，点 C から x 軸に垂線 CD を下ろす。次の問いに答えよ。



(1) AB, BC を求めよ。また，$\angle OBA$ と $\angle CBD$ および点 C の座標を θ を用いて表せ。

(2) 台形 AODC の面積を S とするとき，$S\leqq 1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を示せ。また，等号が成り立つとき，θ の値を求めよ。

(3) $AO+CD\leqq 2$ を示せ。また，等号が成り立つとき，θ の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

曲線 $C : y = |x^2 - 2x|$ と傾きが m の直線 $l : y = mx$ について，次の問いに答えよ。

(1)　曲線 $y = -x^2 + 2x$ と l が接する m の値を求めよ。

(2)　C と l が原点以外の相異なる 2 点で交わるような m の範囲を求めよ。また，そのときの 2 つの交点の座標を m を用いて表せ。

(3)　m は(2)で求めた範囲にあるとする。$x \geqq 2$，$y \leqq mx$，$y \geqq |x^2 - 2x|$ で定まる部分の面積 S を m を用いて表せ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\log_{10}\left(\dfrac{2}{3}\right)$，$\log_{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)$の値を求めよ。

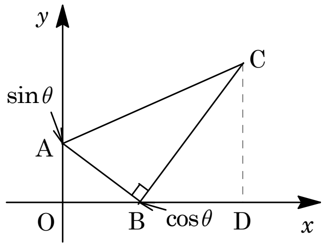
(2) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^m \geqq \dfrac{1}{10}$，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \geqq \dfrac{1}{10}$ を満たす最大の自然数 m, n を求めよ。

(3) 連立不等式$\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\left(\dfrac{1}{2}\right)^y \geqq \dfrac{1}{10}$，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ の表す領域を座標平面に図示せよ。

(4) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^m\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \geqq \dfrac{1}{10}$ を満たす自然数 m と n の組$(m,\ n)$をすべて求めよ。

1

問題のページへ



(1)　A$(0,\ \sin\theta)$，B$(\cos\theta,\ 0)$，$\angle \mathrm{ABC}=\dfrac{\pi}{2}$より，

$$\mathrm{AB}=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$$

$$\mathrm{BC}=\sqrt{\mathrm{AC}^2-\mathrm{AB}^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$$

また，$\tan\angle \mathrm{OBA}=\dfrac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$より，

$$\angle \mathrm{OBA}=\theta,\ \angle \mathrm{CBD}=\frac{\pi}{2}-\theta$$

また，C$(x,\ y)$とおくと，$x=\cos\theta+\sqrt{3}\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$

$$y=\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sqrt{3}\cos\theta$$

よって，C$(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta,\ \sqrt{3}\cos\theta)$となる。

(2)　台形 AODC の面積Sは,

$$S=\frac{1}{2}(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+4\sin\theta\cos\theta)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin2\theta\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}+1$$

なお，等号が成り立つのは$2\theta=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち$\theta=\dfrac{\pi}{4}$のときである。

(3)　$\mathrm{AO}+\mathrm{CD}=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq2$

なお，等号が成り立つのは$\theta+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち$\theta=\dfrac{\pi}{6}$のときである。

［解　説］

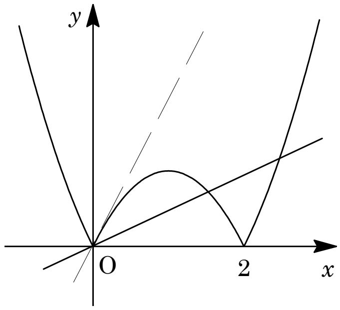
三角比と三角関数の基本知識を確認する問題です。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1) 曲線 $y=-x^2+2x$ に対して，$y'=-2x+2$ となり，$x=0$ のとき $y'=2$ である。

よって，曲線 $y=-x^2+2x$ と直線 $l: y=mx$ が接するのは，$m=2$ のときである。



(2) C と l が原点以外の相異なる 2 点で交わるような m の範囲は，右図より，$0<m<2$ である。

また，$y=-x^2+2x$ と $y=mx$ を連立して，

$$-x^2+2x=mx\,,\ x^2-(2-m)x=0$$

$x\neq 0$ の解は $x=2-m$ から，交点の座標は，$(2-m,\ 2m-m^2)$ となる。

さらに，$y=x^2-2x$ と $y=mx$ を連立して，

$$x^2-2x=mx\,,\ x^2-(2+m)x=0$$

$x\neq 0$ の解は $x=2+m$ から，交点の座標は，$(2+m,\ 2m+m^2)$ となる。

(3) $x\geqq 2$，$y\leqq mx$，$y\geqq\left|x^2-2x\right|$ で定まる部分の面積 S は，

$$S=\int_2^{2+m}(mx-x^2+2x)dx=\int_2^{2+m}\left\{-x^2+(2+m)x\right\}dx$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{2+m}{2}x^2\right]_2^{2+m}=-\frac{1}{3}\left\{(2+m)^3-8\right\}+\frac{2+m}{2}\left\{(2+m)^2-4\right\}$$

$$=-\frac{1}{3}(12m+6m^2+m^3)+\frac{2+m}{2}(4m+m^2)=\frac{1}{6}m^3+m^2$$

［解　説］

微分と積分の基本知識を確認する問題です。(2)は(1)を誘導としてみると，図から判断してもよいと解釈しました。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1) $\log_{10}\left(\dfrac{2}{3}\right)=\log_{10}2-\log_{10}3=0.3010-0.4771=-0.1761$

$$\log_{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\log_{10}2=-0.3010$$

(2) まず，$\left(\dfrac{2}{3}\right)^m \geqq \dfrac{1}{10}$ ……①より，$m\log_{10}\left(\dfrac{2}{3}\right)\geqq -1$ となり，(1)から，

$$m\leqq \frac{1}{0.1761}\fallingdotseq 5.68$$

よって，①を満たす最大の自然数 m は，$m=5$ である。

また，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \geqq \dfrac{1}{10}$ ……②より，$n\log_{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)\geqq -1$ となり，(1)から，

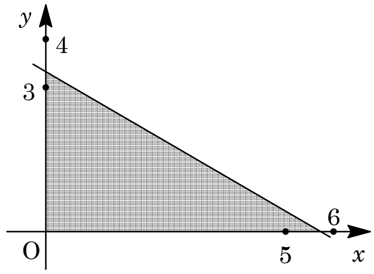
$$m\leqq \frac{1}{0.3010}\fallingdotseq 3.32$$

よって，②を満たす最大の自然数 n は，$n=3$ である。

(3) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\left(\dfrac{1}{2}\right)^y \geqq \dfrac{1}{10}$ から，$x\log_{10}\left(\dfrac{2}{3}\right)+y\log_{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)\geqq -1$ となり，

$$-0.1761x-0.3010y\geqq -1$$

$$0.1761x+0.3010y\leqq 1 \text{ ………③}$$



$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ と合わせると，求める領域は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

(4) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^m\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \geqq \dfrac{1}{10}$ を満たす自然数 $(m,\ n)$ について，右図より，$n=1,\ 2,\ 3$ の場合を考える。

(i)　$n=3$ のとき

$(x,\ y)=(1,\ 3)$ は③を満たさない。この場合は満たす $(m,\ n)$ はない。

(ii)　$n=2$ のとき

$(x,\ y)=(2,\ 2)$ は③を満たすが，$(x,\ y)=(3,\ 2)$ は満たさない

よって，$(m,\ n)=(1,\ 2),\ (2,\ 2)$

(iii)　$n=1$ のとき

$(x,\ y)=(3,\ 1)$ は③を満たすが，$(x,\ y)=(4,\ 1)$ は満たさない

よって，$(m,\ n)=(1,\ 1),\ (2,\ 1),\ (3,\ 1)$

(i)～(iii)より，$(m,\ n)=(1,\ 1),\ (2,\ 1),\ (3,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 2)$

［解 説］

対数計算の基本知識を確認する問題です。数値計算は煩雑です。