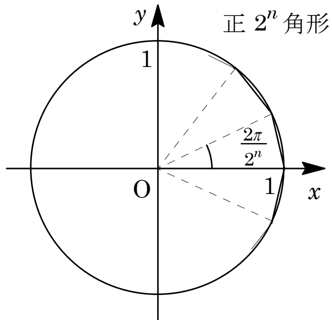
1

解答解説のページへ

半径 1 の円に内接する正2^n角形$(n \geqq 2)$の面積をS_n, 周の長さをL_nとする。次の問いに答えよ。



(1) $S_n = 2^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}$, $L_n = 2^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$ を示せ。

(2) $\dfrac{S_n}{S_{n+1}} = \cos\dfrac{\pi}{2^n}$, $\dfrac{S_n}{L_n} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ を示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}$ を求めよ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n\frac{S_2}{L_2}\frac{S_3}{L_3}\cdots\frac{S_n}{L_n}$ を求めよ。

$\boxed{2}$　　解答解説のページへ

直線 $l:(x,\ y,\ z)=(5,\ 0,\ 0)+s(1,\ -1,\ 0)$ 上に点 $\mathrm{P_0}$ ，直線 $m:(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 2)+t(1,\ 0,\ 2)$ 上に点 $\mathrm{Q_0}$ があり，$\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}$ はベクトル $(1,\ -1,\ 0)$ と $(1,\ 0,\ 2)$ の両方に垂直である。次の問いに答えよ。

(1)　$\mathrm{P_0}$，$\mathrm{Q_0}$ の座標を求めよ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}|$ を求めよ。

(3)　直線 l 上の点 P, 直線 m 上の点 Q について，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{PP_0}}$，$\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}$，$\overrightarrow{\mathrm{Q_0Q}}$ で表せ。
また，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{PP_0}}+\overrightarrow{\mathrm{Q_0Q}}|^2+16$ であることを示せ。

3　　　解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　$f(t)$ を $0 \leqq t \leqq 1$ で連続な関数とする。$\tan x = t$ とおいて，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x}dx = \int_0^1 f(t)\,dt$$

であることを示せ。

(2)　(1)を用いて，0 以上の整数 n に対し，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^n x}{\cos^2 x}dx$ の値を求めよ。また，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx \leqq \frac{1}{n+1}$$

を示せ。

(3)　0 以上の整数 n と $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ を満たす x に対し，

$$\frac{1-\tan^2 x+\tan^4 x-\cdots+(-1)^n \tan^{2n} x}{\cos^2 x} = 1-(-1)^{n+1}\tan^{2(n+1)} x$$

であることを示せ。

(4)　(2)と(3)を用いて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{2k+1}$ の値を求めよ。

4　　解答解説のページへ

$n \geqq 3$ とする。1 個のサイコロを n 回振る。この n 回の試行のうちで 6 の目がちょうど 2 回，しかも続けて出る確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　p_3，p_4 を求めよ。

(2)　p_n を求め，$p_{n+1}-\dfrac{5}{6}p_n=\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$ であることを示せ。

(3)　$s_n=p_3+p_4+\cdots+p_n$ として，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}s_n$ を求めよ。ただし，必要ならば，$|r|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ であることは使ってよい。

1

問題のページへ

(1)　半径 1 の円に内接する正 2^n 角形の面積 S_n，周の長さ L_n は,

$$S_n=\left(\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\frac{2\pi}{2^n}\right)\cdot 2^n=2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}$$

$$L_n=\left(2\cdot 1\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}\right)\cdot 2^n=2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^n}$$

(2)　(1)より，$\dfrac{S_n}{S_{n+1}}=\dfrac{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}}{2^n\sin\frac{\pi}{2^n}}=\dfrac{2\sin\frac{\pi}{2^n}\cos\frac{\pi}{2^n}}{2\sin\frac{\pi}{2^n}}=\cos\dfrac{\pi}{2^n}$

$$\frac{S_n}{L_n}=\frac{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}}{2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^n}}=\frac{2\sin\frac{\pi}{2^n}\cos\frac{\pi}{2^n}}{4\sin\frac{\pi}{2^n}}=\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2^n}$$

(3)　(1)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}}{\frac{\pi}{2^{n-1}}}\cdot\pi=\pi$

また, (2)より，$\cos\dfrac{\pi}{2^2}\cos\dfrac{\pi}{2^3}\cdots\cos\dfrac{\pi}{2^n}=\dfrac{S_2}{S_3}\cdot\dfrac{S_3}{S_4}\cdot\cdots\cdot\dfrac{S_n}{S_{n+1}}=\dfrac{S_2}{S_{n+1}}$ となり,

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_2}{S_{n+1}}=\frac{S_2}{\pi}=\frac{2\sin\frac{\pi}{2}}{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

(4)　(2)より，$\dfrac{S_2}{L_2}\dfrac{S_3}{L_3}\cdots\dfrac{S_n}{L_n}=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{2^2}\cdot\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{2^3}\cdots\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{2^n}=\dfrac{1}{2^{n-1}}\cos\dfrac{\pi}{2^2}\cos\dfrac{\pi}{2^3}\cdots\cos\dfrac{\pi}{2^n}$

すると, (3)より,

$$\lim_{n\to\infty}2^n\frac{S_2}{L_2}\frac{S_3}{L_3}\cdots\frac{S_n}{L_n}=\lim_{n\to\infty}2\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}=\frac{4}{\pi}$$

［解　説］

たいへん細かい誘導がつけられています。取り立てて考える場面がないほどです。

2

問題のページへ

(1) 点 $\mathrm{P_0}$ は，直線 $l:(x,\ y,\ z)=(5,\ 0,\ 0)+s(1,\ -1,\ 0)$ 上にあり，また点 $\mathrm{Q_0}$ は，直線 $m:(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 2)+t(1,\ 0,\ 2)$ 上にあるので，$\mathrm{P_0}(5+s,\ -s,\ 0)$，$\mathrm{Q_0}(t,\ 0,\ 2+2t)$ と表せる。

すると，$\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}=(t-s-5,\ s,\ 2+2t)$ となり，$\vec{l}=(1,\ -1,\ 0)$，$\vec{m}=(1,\ 0,\ 2)$ とおくと，条件より，$\vec{l}\perp\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}$ かつ $\vec{m}\perp\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}$ なので，

$$\vec{l}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}=t-s-5-s=t-2s-5=0\cdots\cdots\cdots①$$
$$\vec{m}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}=t-s-5+4+4t=5t-s-1=0\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$t=-\dfrac{1}{3}$，$s=-\dfrac{8}{3}$ となり，$\mathrm{P_0}\left(\dfrac{7}{3},\ \dfrac{8}{3},\ 0\right)$，$\mathrm{Q_0}\left(-\dfrac{1}{3},\ 0,\ \dfrac{4}{3}\right)$ である。

(2) (1)より，$\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}=\left(-\dfrac{8}{3},\ -\dfrac{8}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{4}{3}(-2,\ -2,\ 1)$ なので，

$$|\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}|=\frac{4}{3}\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+1^2}=4$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{PP_0}}+\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}+\overrightarrow{\mathrm{Q_0Q}}$ となり，(1)から，$\overrightarrow{\mathrm{PP_0}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}=\overrightarrow{\mathrm{Q_0Q}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}=0$ なので，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{PP_0}}+\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}+\overrightarrow{\mathrm{Q_0Q}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{PP_0}}+\overrightarrow{\mathrm{Q_0Q}}+\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}|^2\\&=|\overrightarrow{\mathrm{PP_0}}+\overrightarrow{\mathrm{Q_0Q}}|^2+2(\overrightarrow{\mathrm{PP_0}}+\overrightarrow{\mathrm{Q_0Q}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}+|\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}|^2\\&=|\overrightarrow{\mathrm{PP_0}}+\overrightarrow{\mathrm{Q_0Q}}|^2+16\end{aligned}$$

［解　説］

前問と同じように，誘導に乗れば結論まで一直線です。

3

問題のページへ

(1)　$\tan x = t$ とおくと，$x = 0 \to \dfrac{\pi}{4}$ のとき $t = 0 \to 1$ となり，$\dfrac{1}{\cos^2 x}dx = dt$ から，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x}dx = \int_0^1 f(t)\,dt$$

(2)　(1)より，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^n x}{\cos^2 x}dx = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$

また，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ において，$\tan x \geqq 0$，$\cos^2 x \leqq 1$ から，$\tan^n x \leqq \dfrac{\tan^n x}{\cos^2 x}$ となり，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^n x}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{n+1}$$

(3)　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ において，$0 \leqq \tan^2 x \leqq 1$ から，

$$\begin{aligned}\frac{1-\tan^2 x+\tan^4 x-\cdots+(-1)^n \tan^{2n} x}{\cos^2 x} &= \frac{1-(-\tan^2 x)^{n+1}}{1+\tan^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\\ &= 1-(-1)^{n+1}\tan^{2(n+1)} x\end{aligned}$$

(4)　(3)より，$\dfrac{1}{\cos^2 x} - \dfrac{\tan^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\tan^4 x}{\cos^2 x} - \cdots + (-1)^n \dfrac{\tan^{2n} x}{\cos^2 x} = 1-(-1)^{n+1}\tan^{2(n+1)} x$

この式の両辺を $x = 0 \to \dfrac{\pi}{4}$ で積分すると, (2)から,

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{1-(-1)^{n+1}\tan^{2(n+1)} x\right\}dx$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{4} - (-1)^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2(n+1)} x\,dx$$

(2)より $0 \leqq \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2(n+1)} x\,dx \leqq \frac{1}{2n+3}$ なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2(n+1)} x\,dx = 0$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

［解　説］

金沢大の理系数学に特徴的な積分の問題ですが，傾向は他の問題と同じです。3 題も続くと疑心暗鬼になってしまいます。

4

問題のページへ

(1) サイコロを 3 回振って, 6 の目が 2 回続けて出るのは 2 通りあるので,

$$p_3 = 2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{5}{6} = \frac{5}{108}$$

また, サイコロを 4 回振って, 6 の目が 2 回続けて出るのは 3 通りあるので,

$$p_4 = 3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{432}$$

(2) サイコロを n 回振って, 6 の目が 2 回続けて出るのは $n-1$ 通りあるので,

$$p_n = (n-1)\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$$

$$p_{n+1} - \frac{5}{6}p_n = n\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - (n-1)\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

(3) (2)より，$n \geqq 3$ で，$\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\left(p_{k+1} - \frac{5}{6}p_k\right) = \left(\frac{1}{6}\right)^2\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$ ………(∗)

$$\sum_{k=3}^{n}\left(p_{k+1} - \frac{5}{6}p_k\right) = -\frac{5}{6}p_3 + \frac{1}{6}(p_4 + \cdots + p_n) + p_{n+1}$$

$$= \frac{1}{6}(p_3 + p_4 + \cdots + p_n) - p_3 + p_{n+1} = \frac{1}{6}s_n - p_3 + p_{n+1}$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\right\}}{1-\frac{5}{6}} = \frac{1}{6}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}$$

すると, (∗)より，$s_n - 6p_3 + 6p_{n+1} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ となり,

$$s_n = 6p_3 - 6p_{n+1} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{5}{18} - \frac{1}{6}n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + \frac{25}{36} - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$= \frac{35}{36} - \frac{1}{6}n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

よって，$n\to\infty$ のとき $n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \to 0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}s_n = \frac{35}{36}$ である。

［解 説］

確率と極限の融合で, 計算量はやや多めです。ただ, 計算だけという印象は否めません。