1

解答解説のページへ

座標平面上に 2 点 $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 0)$，$\mathrm{Q}(\cos\theta,\ 1-\sin\theta)$ がある。次の問いに答えよ。

(1) $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2$ を θ で表せ。

(2) $\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}$ を用いて，$\sin\dfrac{7\pi}{12}$ の値を求めよ。

(3) $\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\pi$ における $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2$ の最大値と最小値を求めよ。また，最大値，最小値を与える θ の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

座標平面上の点 P は, 硬貨を 1 回投げて表が出れば x 軸の正の方向に 2, 裏が出れば y 軸の正の方向に 1 だけ進むことにする。最初, P は原点にある。硬貨を 5 回投げた後の P の到達点について, 次の問いに答えよ。

(1) P の到達点が $(10,\ 0)$ となる確率を求めよ。また, $(6,\ 2)$ となる確率を求めよ。

(2) 2 点 $(10,\ 0)$, $(6,\ 2)$ を通る直線 l の方程式を求めよ。また, P の到達点はすべて直線 l 上にあることを示せ。

(3) (2)で求めた直線 l と原点との距離を求めよ。

(4) P の到達点と原点との距離 d が, $2\sqrt{5} < d \leqq 5$ となる確率を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

実数 x に対して，関数 $f(x)$ を，$f(x)=\left|x^2-6x+5\right|-x^2+4x+5$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　$0 \leqq x \leqq 6$ において，$f(x)$ は $x=a$ で最大値 $f(a)$ を，$x=b$ で最小値 $f(b)$ をとる。a, b および $f(a)$，$f(b)$ を求めよ。

(3)　(2)で求めた a, b について，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 0)$，$\mathrm{Q}(\cos\theta,\ 1-\sin\theta)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(\cos\theta-\sqrt{3},\ 1-\sin\theta)$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=(\cos\theta-\sqrt{3})^2+(1-\sin\theta)^2=5-2\sin\theta-2\sqrt{3}\cos\theta$$

(2)　$\sin\dfrac{7\pi}{12}=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(3)　(1)より，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=5-4\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ となり，$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\pi$ から $\dfrac{7\pi}{12}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{4\pi}{3}$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$ は，$\theta=\pi$ のとき最大値 $5-4\sin\dfrac{4\pi}{3}=5+2\sqrt{3}$ をとり，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最小値 $5-4\sin\dfrac{7\pi}{12}=5-\sqrt{6}-\sqrt{2}$ をとる。

［解　説］

三角関数の計算だけの問題です。

2

問題のページへ

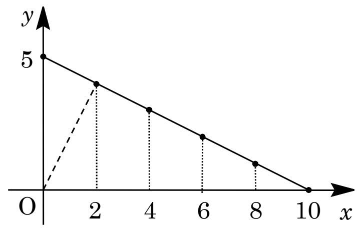
(1)　硬貨を 5 回投げた後，P の到達点が $(10,\ 0)$ となるのは表が 5 回出た場合より，その確率は，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\dfrac{1}{32}$ である。

また，到達点が $(6,\ 2)$ となるのは，表 3 回，裏 2 回出た場合より，その確率は，

$${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$$

(2)　2 点 $(10,\ 0)$，$(6,\ 2)$ を通る直線 l の方程式は，

$$y=\frac{-2}{10-6}(x-10),\quad y=-\frac{1}{2}x+5$$



また，n を 0 以上 5 以下の整数として，表 n 回，裏 $5-n$ 回出た場合，点 P の到達点 $(x,\ y)$ は，

$$x=2n,\quad y=5-n$$

これより，$y=-\dfrac{1}{2}x+5$ となり，P の到達点はすべて直線 l 上にある。

(3)　直線 $l: x+2y-10=0$ と原点との距離は，$\dfrac{|-10|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\sqrt{5}$ である。

(4)　P の到達点と原点との距離 d が，$2\sqrt{5}<d\leqq 5$ となるのは，到達点が $(0,\ 5)$ および $(4,\ 3)$ の場合だけより，その確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{11}{32}$$

［解　説］

センター試験風の確率の問題ですが，難易はセンター試験より易です。

3

問題のページへ

(1)　$f(x)=\left|x^2-6x+5\right|-x^2+4x+5$ に対して，

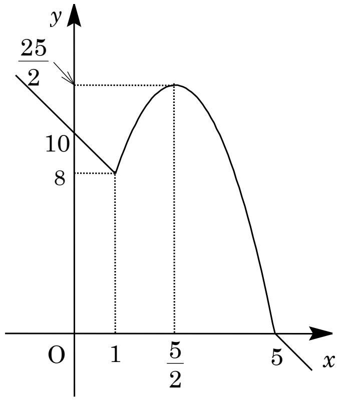
(i)　$x^2-6x+5\geqq 0$ $(x\leqq 1,\ 5\leqq x)$ のとき

$$f(x)=x^2-6x+5-x^2+4x+5=-2x+10$$

(ii)　$x^2-6x+5<0$ $(1<x<5)$ のとき

$$f(x)=-x^2+6x-5-x^2+4x+5$$
$$=-2x^2+10x=-2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{2}$$

(i)(ii)より，$y=f(x)$ のグラフは右図のとおり。



(2)　(1)より，$0\leqq x\leqq 6$ において，$f(x)$ は $x=\frac{5}{2}$ で最大値 $f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{25}{2}$ をとり，$x=6$ で最小値 $f(6)=-2$ をとる。

(3)　$a=\frac{5}{2}$，$b=6$ より，面積を対応させると，

$$\int_a^b f(x)dx=\int_{\frac{5}{2}}^5(-2x^2+10x)dx+\int_5^6(-2x+10)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^5-2x(x-5)dx+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(-2)=\frac{1}{6}\cdot 5^3-1=\frac{119}{6}$$

［解　説］

絶対値の処理と定積分の計算問題です。ともに基本です。