1

解答解説のページへ

正の実数 a, b, c に対して，O を原点とする座標空間に 3 点 $\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$がある。$\mathrm{AC}=2$，$\mathrm{BC}=3$かつ△ABC の面積が$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$となるとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\sin\angle\mathrm{ACB}$の値を求めよ。また，線分 AB の長さを求めよ。

(2)　a, b, c の値を求めよ。

(3)　四面体 OABC の体積を求めよ。また，原点 O から△ABC に下ろした垂線の長さを求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対して，関数 $f(\theta)$ を，$f(\theta)=\dfrac{2}{3}\sin 3\theta-\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$ とおく。$t=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ を示せ。また，$\dfrac{t^3-3t}{2}=\sin 3\theta$ が成り立つことを示せ。

(3)　$f(\theta)$ を t の式で表せ。また，それを利用して $f(\theta)$ の最大値と最小値，および最大値と最小値を与える θ の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

$a>0$ とする。$x \geqq 0$ における関数 $f(x)=e^{\sqrt{ax}}$ と曲線 $C: y=f(x)$ について，次の問いに答えよ。

(1) C 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{a},\ f\left(\dfrac{1}{a}\right)\right)$ における接線 l の方程式を求めよ。また，P を通り l に直交する直線 m の方程式を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{a}} f(x)dx$ を $t=\sqrt{ax}$ とおくことにより求めよ。

(3) 曲線 C，直線 $y=1$ および直線 m で囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ。また，$a>0$ における $S(a)$ の最小値とそれを与える a の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

行列 $A=\begin{pmatrix}\frac{7}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{7}{2}\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ に対して，次の問いに答えよ。

(1)　実数 x, y, u, v が，$xA+yE=uA+vE$ を満たすならば，$x=u$，$y=v$ であることを示せ。

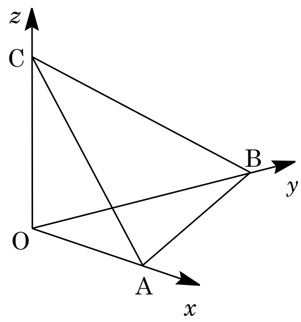
(2)　$A=a_1A+b_1E$，$A^2=a_2A+b_2E$ となる実数 a_1，b_1，a_2，b_2 を求めよ。

(3)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$A^n=a_nA+b_nE$ となる実数 a_n，b_n を n を用いて表せ。

(4)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，実数 c_n，d_n が，$A+A^2+A^3+\cdots+A^n=c_nA+d_nE$ を満たしているとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{d_n}$ を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$\mathrm{AC}=2$，$\mathrm{BC}=3$，$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ より，

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\sin\angle\mathrm{ACB}=\frac{3\sqrt{3}}{2},\ \sin\angle\mathrm{ACB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\angle\mathrm{ACB}<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{\pi}{3}$ となり，

$$\mathrm{AB}^2=2^2+3^2-2\cdot 2\cdot 3\cos\frac{\pi}{3}=4+9-6=7$$

よって，$\mathrm{AB}=\sqrt{7}$ である。

(2)　$\mathrm{AB}=\sqrt{7}$，$\mathrm{BC}=3$，$\mathrm{AC}=2$ より，

$$a^2+b^2=7\cdots\cdots\cdots①,\ b^2+c^2=9\cdots\cdots\cdots②,\ c^2+a^2=4\cdots\cdots\cdots③$$

①②③より，$a^2+b^2+c^2=10\cdots\cdots\cdots④$

②④より $a^2=1$，③④より $b^2=6$，①④より $c^2=3$ となり，

$$a=1,\ b=\sqrt{6},\ c=\sqrt{3}$$

(3)　四面体 OABC の体積を V, O から△ABC に下ろした垂線の長さを h とすると，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ V=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}h=\frac{\sqrt{3}}{2}h$$

よって，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}h=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ より，$h=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

［解 説］

空間座標の基本的な計算問題です。ただ，それだけです。

2

問題のページへ

(1)　$t=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$となり，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$より$-\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{5}{6}\pi$

よって，$-1\leqq t\leqq 2$である。

(2)　$\sin 3\theta=\sin(2\theta+\theta)=\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta$

$=2\sin\theta\cos^2\theta+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta=2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta$

$=3\sin\theta-4\sin^3\theta\cdots\cdots\cdots(*)$

また，$(*)$より$t^3-3t=8\sin^3\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)-6\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=-2\sin 3\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$となり，

$$\frac{t^3-3t}{2}=-\sin 3\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin(3\theta+\pi)=\sin 3\theta$$

(3)　(2)より，$f(\theta)=\dfrac{2}{3}\sin 3\theta-\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{t^3-3t}{2}-t=\dfrac{1}{3}t^3-2t$

ここで，$g(t)=f(\theta)$とおくと，

$g'(t)=t^2-2$

すると，$-1\leqq t\leqq 2$における$g(t)$の増減は右表のようになる。

t	-1	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	$\dfrac{5}{3}$	↘	$-\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$	↗	$-\dfrac{4}{3}$

よって，$f(\theta)$の最大値は$\dfrac{5}{3}$であり，このとき$t=-1$より，

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2},\ \theta=-\frac{\pi}{2}$$

また，$f(\theta)$の最小値は$-\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$であり，このとき$t=\sqrt{2}$より，

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \theta=-\frac{\pi}{12},\ \frac{5}{12}\pi$$

［解　説］

三角関数の計算問題です。なお，(2)は合成した式を利用して証明していますが，もとの式を変形しても構いません。少し計算量が多くなりますが。

3 問題のページへ

(1)　$f(x)=e^{\sqrt{ax}}$ に対して，$f'(x)=\dfrac{a}{2\sqrt{ax}}e^{\sqrt{ax}}$ となり，$f'\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{ae}{2}$

これより，$C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{a},\ f\left(\dfrac{1}{a}\right)\right)$ における接線 l の方程式は,

$$y-e=\frac{ae}{2}\left(x-\frac{1}{a}\right),\quad y=\frac{ae}{2}x+\frac{e}{2}$$

また, P を通り l に直交する直線 m の方程式は,

$$y-e=-\frac{2}{ae}\left(x-\frac{1}{a}\right),\quad y=-\frac{2}{ae}x+\frac{2}{a^2e}+e$$

(2)　$t=\sqrt{ax}$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{a}{2\sqrt{ax}}=\dfrac{a}{2t}$ より，$dx=\dfrac{2t}{a}dt$ となり，

$$\int_0^{\frac{1}{a}}f(x)dx=\int_0^1 e^t\cdot\frac{2t}{a}dt=\frac{2}{a}\left\{\left[\,te^t\,\right]_0^1-\int_0^1 e^t\,dt\right\}=\frac{2}{a}\{e-(e-1)\}=\frac{2}{a}$$

(3)　直線 $y=1$ と直線 m の交点は，$-\dfrac{2}{ae}x+\dfrac{2}{a^2e}+e=1$ より，

$$\frac{2}{ae}x=\frac{2}{a^2e}+e-1,\quad x=\frac{2+a^2e^2-a^2e}{2a}$$

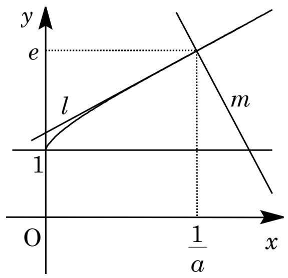
すると，曲線 C, 直線 $y=1$ および直線 m で囲まれた図形の面積 $S(a)$ は,

$$S(a)=\frac{2}{a}-\left(\frac{1}{a}\cdot 1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2+a^2e^2-a^2e}{2a}-\frac{1}{a}\right)(e-1)$$

$$=\frac{1}{a}+\frac{a^2e(e-1)^2}{4a}=\frac{4+e(e-1)^2a^2}{4a}$$

$$S'(a)=\frac{2e(e-1)^2a^2-4-e(e-1)^2a^2}{4a^2}$$

$$=\frac{e(e-1)^2a^2-4}{4a^2}$$



これより，$a>0$ における $S(a)$ の増減は右表のようになり，$a=\dfrac{2}{\sqrt{e}(e-1)}$ のとき最小値 $\sqrt{e}(e-1)$ をとる。

a	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{\sqrt{e}(e-1)}$	$\cdots$
$S'(a)$		$-$	0	$+$
$S(a)$		↘	$\sqrt{e}(e-1)$	↗

［解 説］

やや計算量は多いものの，誘導に従うという方針だけで，結論まで一直線です。なお，点 P は曲線 C の変曲点になっています。

4

問題のページへ

(1) $A=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}7 & 1\\ 1 & 7\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$に対して，$xA+yE=uA+vE$より，

$$(x-u)A+(y-v)E=O,\ \frac{x-u}{2}\begin{pmatrix}7 & 1\\ 1 & 7\end{pmatrix}+(y-v)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

よって，$x-u=y-v=0$から，$x=u$，$y=v$である。

(2) $A=1\cdot A+0\cdot E$より，(1)から，$a_1=1$，$b_1=0$

また，ハミルトン・ケーリーの定理より，$A^2-7A+12E=O$

すると，$A^2=7A-12E$より，(1)から，$a_2=7$，$b_2=-12$

(3) $A^n=a_nA+b_nE$とおくと，

$$A^{n+1}=(a_nA+b_nE)A=a_nA^2+b_nA=a_n(7A-12E)+b_nA$$
$$=(7a_n+b_n)A-12a_nE$$

また，$A^{n+1}=a_{n+1}A+b_{n+1}E$より，(1)の結果を利用すると，

$$a_{n+1}=7a_n+b_n\ \cdots\cdots\cdots①,\ b_{n+1}=-12a_n\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$a_{n+1}=7a_n-12a_{n-1}\quad(n\geqq 2)$となり，

$$a_{n+1}-4a_n=3(a_n-4a_{n-1})=(a_2-4a_1)\cdot 3^{n-1}=3^n\ \cdots\cdots\cdots③$$
$$a_{n+1}-3a_n=4(a_n-3a_{n-1})=(a_2-3a_1)\cdot 4^{n-1}=4^n\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$a_n=4^n-3^n$となり，$n=1$のときも満たしている。

②に代入すると，$n\geqq 2$で，$b_n=-12a_{n-1}=-12(4^{n-1}-3^{n-1})=-3\cdot 4^n+4\cdot 3^n$となり，この式は$n=1$のときも満たしている。

(4) $A+A^2+A^3+\cdots+A^n=c_nA+d_nE$より，(1)の結果を利用すると，

$$c_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{4(4^n-1)}{4-1}-\frac{3(3^n-1)}{3-1}=\frac{4}{3}(4^n-1)-\frac{3}{2}(3^n-1)$$

$$d_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=\frac{-12(4^n-1)}{4-1}+\frac{12(3^n-1)}{3-1}$$
$$=-4(4^n-1)+6(3^n-1)$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{d_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{3}(4^n-1)-\frac{3}{2}(3^n-1)}{-4(4^n-1)+6(3^n-1)}=\frac{\frac{4}{3}}{-4}=-\frac{1}{3}$

［解 説］

行列の n 乗と漸化式の融合の典型題です。前問と同様，誘導に従うという方針だけで，結論まで一直線です。