1

解答解説のページへ

放物線$C: y = x^2 + 2x$上の 2 点$(a,\ a^2 + 2a)$，$(b,\ b^2 + 2b)$における接線をそれぞれl_a，l_bとするとき，次の問いに答えよ。ただし，$a < b$とする。

(1) 2 直線l_a，l_bの方程式を求めよ。また，l_aとl_bの交点のx座標を求めよ。

(2) 放物線Cと 2 直線l_a，l_bとで囲まれた図形の面積Sを求めよ。

(3) 2 直線l_a，l_bが垂直に交わるようにa，bが動くとき，a，bが満たす関係式を求めよ。また，そのときの面積Sの最小値とそれを与えるa, bの値を求めよ。

2

解答解説のページへ

1 から 4 までの番号を書いた玉が 2 個ずつ，合計 8 個の玉が入った袋があり，この袋から玉を 1 個取り出すという操作を続けて行う。ただし，取り出した玉は袋に戻さず，また，すでに取り出した玉と同じ番号の玉が出てきた時点で一連の操作を終了するものとする。

玉をちょうど n 個取り出した時点で操作が終わる確率を $P(n)$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$P(2)$，$P(3)$ を求めよ。

(2)　6 以上の k に対し，$P(k)=0$ が成り立つことを示せ。

(3)　一連の操作が終了するまでに取り出された玉の個数の期待値を求めよ。

3

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$が，$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=2^n-1\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を満たしている。次の問いに答えよ。

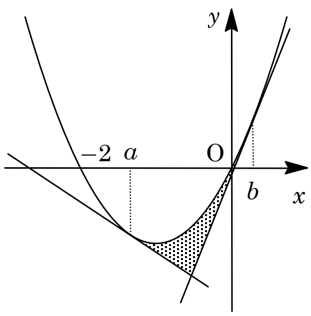
(1) 一般項a_nを求めよ。

(2) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$とおくとき，$S_n=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$となることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3) 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_k}$を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$C: y = x^2 + 2x$ に対し，$y' = 2x + 2$

点 $(a,\ a^2 + 2a)$ における接線 l_a の方程式は,

$$y - (a^2 + 2a) = (2a + 2)(x - a)$$

$$y = (2a + 2)x - a^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

同様に接線 l_b の方程式は，$y = (2b + 2)x - b^2 \cdots\cdots\cdots ②$

①②を連立して，$(2a + 2)x - a^2 = (2b + 2)x - b^2$

$$2(a - b)x = a^2 - b^2,\ x = \frac{a + b}{2}$$

(2)　$S = \displaystyle\int_a^{\frac{a+b}{2}} \{x^2 + 2x - (2a + 2)x + a^2\}dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} \{x^2 + 2x - (2b + 2)x + b^2\}dx$

$$= \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x - a)^2\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} (x - b)^2\,dx = \Big[\frac{(x - a)^3}{3}\Big]_a^{\frac{a+b}{2}} + \Big[\frac{(x - b)^3}{3}\Big]_{\frac{a+b}{2}}^{b}$$

$$= \frac{1}{3}\Big(\frac{b - a}{2}\Big)^3 - \frac{1}{3}\Big(\frac{a - b}{2}\Big)^3 = \frac{1}{12}(b - a)^3$$

(3)　l_a と l_b が垂直に交わることより，$(2a + 2)(2b + 2) = -1$ となり，

$$(a + 1)(b + 1) = -\frac{1}{4} \cdots\cdots\cdots ③$$

さて，$a < b$ なので，③より $a + 1 < 0 < b + 1$ となり，相加・相乗平均の関係より，

$$b - a = (b + 1) - (a + 1) = b + 1 + \frac{1}{4(b + 1)} \geqq 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 1$$

等号は，$b + 1 = \dfrac{1}{4(b + 1)}$ すなわち $b + 1 = \dfrac{1}{2}$ のときに成立する。

以上より，S の最小値は $\dfrac{1}{12}\cdot 1^3 = \dfrac{1}{12}$ となり，このとき $b = -\dfrac{1}{2}$，さらに③から $a + 1 = -\dfrac{1}{4}\cdot 2 = -\dfrac{1}{2}$ すなわち $a = -\dfrac{3}{2}$ である。

［解 説］

(3)の設問まで含めて，センターレベルの超頻出問題です。

2

問題のページへ

(1)　2 個の玉を取り出した時点で操作が終わるのは，1 個目と 2 個目の番号が等しいときより，その確率は,

$$P(2)=\frac{8\times1}{{}_8\mathrm{P}_2}=\frac{1}{7}$$

また, 3 個の玉を取り出した時点で操作が終わるのは, 1 個目と 2 個目の番号が異なり, 3 個目の番号が 1 個目または 2 個目の番号と等しいときより，その確率は,

$$P(3)=\frac{8\times6\times2}{{}_8\mathrm{P}_3}=\frac{2}{7}$$

(2)　玉の番号は 4 種類なので，5 個取り出した時点で操作は必ず終わる。
これより，6 以上の k に対し，$P(k)=0$ となる。

(3)　(1)と同様に考えると,

$$P(4)=\frac{8\times6\times4\times3}{{}_8\mathrm{P}_4}=\frac{12}{35},\ P(5)=\frac{8\times6\times4\times2\times4}{{}_8\mathrm{P}_5}=\frac{8}{35}$$

よって，一連の操作が終了するまでに取り出された玉の個数の期待値 E は,

$$E=2\times\frac{1}{7}+3\times\frac{2}{7}+4\times\frac{12}{35}+5\times\frac{8}{35}=\frac{128}{35}$$

［解　説］

確率の基本問題です。(2)は，鳩の巣原理を適用したように記せばよいのでしょう。

$\boxed{3}$ 問題のページへ

(1)　条件より，$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=2^n-1$ ……①なので，$n\geqq 2$ において，

$$na_n=(2^n-1)-(2^{n-1}-1)=2^{n-1},\ \ a_n=\frac{2^{n-1}}{n}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①に $n=1$ をあてはめて得られる $a_1=1$ は，②に $n=1$ を代入した値と一致する。

よって，$a_n=\dfrac{2^{n-1}}{n}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2)　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^{k-1}}$ のとき $S_n=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$ ……③となることを，数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$S_1=\dfrac{1}{2^0}=1$ であるが，③に $n=1$ を代入すると成立する。

(ii)　$n=l$ のとき　$S_l=4-\dfrac{l+2}{2^{l-1}}$ と仮定する。

$$S_{l+1}=S_l+\frac{l+1}{2^l}=4-\frac{l+2}{2^{l-1}}+\frac{l+1}{2^l}=4-\frac{2l+4-l-1}{2^l}=4-\frac{l+3}{2^l}$$

よって，$n=l+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$S_n=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(3)　まず，$T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^{k-1}}$ とおくと，

$$T_n-\frac{1}{2}T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^{k-1}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^{k-1}}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{(k-1)^2}{2^{k-1}}$$

$$=\frac{1^2}{2^0}+\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{2^{k-1}}-\sum_{k=2}^{n}\frac{(k-1)^2}{2^{k-1}}-\frac{n^2}{2^n}=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{2k-1}{2^{k-1}}-\frac{n^2}{2^n}$$

(2)より，$\dfrac{1}{2}T_n=1+2(S_n-S_1)-\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}-\frac{n^2}{2^n}$

$$=1+2\left(4-\frac{n+2}{2^{n-1}}-1\right)-\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n^2}{2^n}$$

$$=6+\frac{-4(n+2)+2-n^2}{2^n}=6-\frac{n^2+4n+6}{2^n}$$

よって，$T_n=12-\dfrac{n^2+4n+6}{2^{n-1}}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ である。

［解 説］

頻出の(等差)×(等比)タイプの和を求める問題です。(3)では，シグマ記号を使って解答例を書きましたが，普通に項を並べて記しても構いません。