**1**　　解答解説のページへ

$a$ を実数とする。このとき，座標空間内の球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$ と直線 $l: (x,\ y,\ z)=(2,\ -1,\ 0)+t(-1,\ a,\ a)$ について，次の問いに答えよ。

(1) $S$ と $l$ が異なる 2 点で交わるような $a$ の値の範囲を求めよ。

(2) $a$ の値が(1)で求めた範囲にあるとき，$S$ と $l$ の 2 つの交点の間の距離 $d$ を $a$ を用いて表せ。

(3) (2)の $d$ が最大となるような実数 $a$ の値とそのときの $d$ を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

関数 $y=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$ のグラフ $C$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$C$ の変曲点のうち，$x$ 座標が最大となる点 P の $x$ 座標を求めよ。

(2)　(1)で求めた P の $x$ 座標を $b$ とするとき，$\tan\theta=e^b$ を満たす $\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対し，$\tan 2\theta$ および $\theta$ の値を求めよ。

(3)　上の $b$ に対する直線 $x=b$ と $x$ 軸，$y$ 軸および $C$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

**3**

解答解説のページへ

行列 $P=\begin{pmatrix} x & \dfrac{\sqrt{2}}{3} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{3} & y \end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$P^2=P$ を満たす実数の組 $(x,\ y)$ は 2 組ある。これらを求めよ。

(2)　(1)で求めた 2 つの組を $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ とし，それぞれに対応する行列 $P$ を $P_1$，$P_2$ とおく。ただし，$x_1<x_2$ とする。このとき，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$(P_1P_2)^nP_1=r_nP_1$ を満たす実数 $r_n$ を求めよ。

(3)　重複を許して $P_1$，$P_2$ を 6 個並べて得られる順列 $Q_1\ Q_2\ Q_3\ Q_4\ Q_5\ Q_6$ のうちで $Q_1=P_1$ となるものすべてを考え，それぞれの順列に 6 個の行列の積 $P_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ を対応させる。このようにして得られる行列のうち，異なるものはいくつあるか。

**4**

解答解説のページへ

自然数が 1 つずつ書かれている玉が,

① ① ② ① ② ③ ① ② ③ ④ ① ② ③ ④ ⑤ ① ② ……

のように 1 列に並べられている。次の問いに答えよ。

(1) 数 100 が書かれた玉が最初に現れるのは何番目か。

(2) 自然数 $n$ に対し, $2n^2$ 番目の玉に書かれている数は何か。

(3) 1 番目から $2n^2$ 番目までの玉をすべて袋に入れた。この袋から 2 つの玉を取り出すとき, 同じ数が書かれた玉を取り出す確率を求めよ。

**1**

問題のページへ

(1) $S: x^2+y^2+z^2=1$ ………①，$l:(x,\ y,\ z)=(2,\ -1,\ 0)+t(-1,\ a,\ a)$ ………②

①②を連立すると，$(2-t)^2+(-1+at)^2+(at)^2=1$ となり，

$$(2a^2+1)t^2-2(a+2)t+4=0 \text{ ………③}$$

③が異なる 2 実数解をもつことより，$D/4=(a+2)^2-4(2a^2+1)>0$ となり，

$$-7a^2+4a>0,\ 0<a<\frac{4}{7}$$

(2) ③の解 $t=\dfrac{a+2\pm\sqrt{-7a^2+4a}}{2a^2+1}$ を $t=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，交点 P，Q は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2,\ -1,\ 0)+\alpha(-1,\ a,\ a),\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(2,\ -1,\ 0)+\beta(-1,\ a,\ a)$$

すると，$d=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=(\beta-\alpha)|(-1,\ a,\ a)|$ となり，

$$d=\frac{2\sqrt{-7a^2+4a}}{2a^2+1}\cdot\sqrt{(-1)^2+a^2+a^2}=2\sqrt{\frac{-7a^2+4a}{2a^2+1}}$$

(3) $f(a)=\dfrac{-7a^2+4a}{2a^2+1}$ とおくと，$d=2\sqrt{f(a)}$ となり，

$$f'(a)=\frac{(-14a+4)(2a^2+1)-(-7a^2+4a)\cdot 4a}{(2a^2+1)^2}$$

$$=\frac{-2(4a^2+7a-2)}{(2a^2+1)^2}$$

$$=\frac{-2(4a-1)(a+2)}{(2a^2+1)^2}$$

| $a$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{4}$ | | $\frac{4}{7}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(a)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(a)$ | | $\nearrow$ | $\frac{1}{2}$ | $\searrow$ | |

すると，$f(a)$ の増減は右表のようになり，

$a=\dfrac{1}{4}$ のとき $d$ は最大値 $2\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\sqrt{2}$ をとる。

## ［解 説］

空間図形に関する基本的な問題です。誘導に従っていけば，上の解答例になるでしょう。

**2**

問題のページへ

(1)　$y=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$ に対して，$y'=-\dfrac{e^x-e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}$ となり，

$$y''=-\frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})\cdot 2(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^4}$$

$$=-\frac{(e^x+e^{-x})^2-2(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^3}=\frac{e^{2x}-6+e^{-2x}}{(e^x+e^{-x})^3}=\frac{e^{4x}-6e^{2x}+1}{e^{2x}(e^x+e^{-x})^3}$$

ここで，$y''=0$ とすると，$e^{2x}=3\pm 2\sqrt{2}$ となり，

$$x=\frac{1}{2}\log(3\pm 2\sqrt{2})=\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}\pm 1)^2=\log(\sqrt{2}\pm 1)$$

この $x$ の値の前後で $y''$ の符号は変わり，$x$ 座標の大きい方の変曲点 P の $x$ 座標は $\log(\sqrt{2}+1)$ である。

(2)　条件より，$b=\log(\sqrt{2}+1)$，$\tan\theta=e^b=\sqrt{2}+1$ なので，

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2(\sqrt{2}+1)}{1-(3+2\sqrt{2})}=-1$$

これより，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ なので $2\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ となり，$\theta=\dfrac{3}{8}\pi$ である。

(3)　直線 $x=b$ と $x$ 軸，$y$ 軸および $C$ で囲まれた図形の面積を $S$ とする。

ここで，$y=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}>0$ なので，$S=\displaystyle\int_0^b\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx=\int_0^b\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$ である。

(2)より，$e^x=\tan\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$e^x dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ より，

$$dx=\frac{1}{\tan\theta\cos^2\theta}d\theta=\frac{1+\tan^2\theta}{\tan\theta}d\theta$$

すると，$S=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi}\frac{\tan\theta}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1+\tan^2\theta}{\tan\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi}d\theta=\frac{3}{8}\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$

［解　説］

(2)の設問が(3)の定積分の計算への誘導となっています。(2)がない場合は $e^x=t$ とおいた後，$t=\tan\theta$ とするので，結局，同じことになります。ただ，上端の値がちょっとわかりにくいですが。

**3**

問題のページへ

(1) $P=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}3x & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 3y\end{pmatrix}$に対し, $E$を単位行列として，ハミルトン・ケーリーの定理から,

$$P^2-(x+y)P+\left(xy-\frac{2}{9}\right)E=O$$

条件より，$P^2=P$なので，$(1-x-y)P+\left(xy-\dfrac{2}{9}\right)E=O$

$P$は$E$の実数倍ではないので，$1-x-y=0$ ……①，$xy-\dfrac{2}{9}=0$ ……②

①②より$x+y=1$，$xy=\dfrac{2}{9}$なので，$(x,\ y)$は$t^2-t+\dfrac{2}{9}=0$の2つの解となり，

$$\left(t-\frac{1}{3}\right)\left(t-\frac{2}{3}\right)=0,\ t=\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}$$

よって，$(x,\ y)=\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$，$\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

(2) $x_1<x_2$より，$(x_1,\ y_1)=\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$，$(x_2,\ y_2)=\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$となり，

$$P_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 2\end{pmatrix},\ P_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 1\end{pmatrix}$$

すると，$P_1P_2=\dfrac{1}{9}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 1\end{pmatrix}=\dfrac{2}{9}\begin{pmatrix}2 & \sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & 2\end{pmatrix}$となり，

$$(P_1P_2)^2=\frac{4}{81}\begin{pmatrix}2 & \sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & \sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & 2\end{pmatrix}=\frac{16}{81}\begin{pmatrix}2 & \sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & 2\end{pmatrix}=\frac{8}{9}P_1P_2$$

これより，$(P_1P_2)^n=\left(\dfrac{8}{9}\right)^{n-1}P_1P_2$となり，$(P_1P_2)^nP_1=\left(\dfrac{8}{9}\right)^{n-1}P_1P_2P_1$ ………③

さらに，$P_1P_2P_1=\dfrac{2}{27}\begin{pmatrix}2 & \sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 2\end{pmatrix}=\dfrac{8}{27}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 2\end{pmatrix}=\dfrac{8}{9}P_1$ ………④

③④より，$(P_1P_2)^nP_1=\left(\dfrac{8}{9}\right)^nP_1$となり，$r_n=\left(\dfrac{8}{9}\right)^n$である。

(3) 条件より，$P_1{}^2=P_1$，$P_2{}^2=P_2$なので，$X=P_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$とおくと，

$$X=P_1,\ X=P_1P_2,\ X=P_1P_2P_1=\frac{8}{9}P_1,\ X=P_1P_2P_1P_2=\frac{8}{9}P_1P_2$$

$$X=P_1P_2P_1P_2P_1=\frac{8}{9}P_1P_2P_1=\frac{64}{81}P_1,\ X=P_1P_2P_1P_2P_1P_2=\frac{64}{81}P_1P_2$$

これらはすべて異なるので, $X$は6個存在する。

［解　説］

行列の演算について, 計算を進めると視界が開けてくるタイプです。

## 4

問題のページへ

(1)　与えられた玉の列を下記のようにグループ分けを行う。

①｜① ②｜① ② ③｜① ② ③ ④｜① ② ③ ④ ⑤｜① ② ……

左から，第 1 群，第 2 群，第 3 群，…とすると，第 $k$ 群の右端までの個数は，

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$$

さて，この玉の列で，数 100 が書かれた玉が最初に現れるのは，第 100 群の右端より，$\frac{1}{2}\cdot100\cdot101=5050$ 番目となる。

(2)　$2n^2$ 番目の玉が，第 $k$ 群に属するとすると，

$$\frac{1}{2}(k-1)k<2n^2\leqq\frac{1}{2}k(k+1)\,,\ (k-1)k<4n^2\leqq k(k+1)\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$k=2n$ のとき，$(k-1)k=4n^2-2n$，$k(k+1)=4n^2+2n$ から，$(*)$を満たす。よって，$2n^2$ 番目の玉は第 $2n$ 群に属する。

そこで，第 $2n-1$ 群の右端までの個数は，$\frac{1}{2}(2n-1)2n=n(2n-1)$ となり，$2n^2$ 番目の玉は，第 $2n$ 群の $2n^2-n(2n-1)=n$ 番目すなわち数 $n$ が書かれている。

(3)　$2n^2$ 個の玉から 2 つを取り出す ${}_{2n^2}\mathrm{C}_2=n^2(2n^2-1)$ 通りが同様に確からしい。

(2)より，$2n^2$ 番目の玉は第 $2n$ 群の $n$ 番目より，数 1 の玉は $2n$ 個，数 2 の玉は $2n-1$ 個，数 3 の玉は $2n-2$ 個，…，数 $n$ の玉は $n+1$ 個ある。さらに，数 $n+1$ の玉は $n-1$ 個，数 $n+2$ の玉は $n-2$ 個，…，数 $2n-2$ の玉は 2 個，数 $2n-1$ の玉は 1 個ある。

すると，同じ数が書かれた玉を取り出す場合の数は，$n\geqq2$ のとき，

$$\begin{aligned}&{}_{2n}\mathrm{C}_2+{}_{2n-1}\mathrm{C}_2+{}_{2n-2}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{n+1}\mathrm{C}_2+{}_{n-1}\mathrm{C}_2+{}_{n-2}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_2\mathrm{C}_2\\&=({}_2\mathrm{C}_2+{}_3\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{n-1}\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_2+{}_{n+1}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{2n-1}\mathrm{C}_2+{}_{2n}\mathrm{C}_2)-{}_n\mathrm{C}_2\\&=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2}k(k-1)-\frac{1}{2}n(n-1)\\&=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{2n}\{(k+1)k(k-1)-k(k-1)(k-2)\}-\frac{1}{2}n(n-1)\\&=\frac{1}{6}(2n+1)2n(2n-1)-\frac{1}{2}n(n-1)=\frac{1}{6}n(8n^2-3n+1)\end{aligned}$$

よって，同じ数が書かれた玉を取り出す確率は，$\dfrac{8n^2-3n+1}{6n(2n^2-1)}$ である。これは $n=1$ の場合も満たしている。

### ［解　説］

標準的な群数列の問題です。(3)はミスを犯しそうなので，具体的に記しました。