1　解答解説のページへ

平面上の三角形 ABC で，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=7$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=5$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=6$ となるものを考える。また，三角形 ABC の内部の点 P は，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+s\overrightarrow{\mathrm{PB}}+3\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$　$(s>0)$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とするとき，α と β を s を用いて表せ。

(2)　2 直線 AP, BC の交点を D とするとき，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|}$ と $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PD}}|}$ を s を用いて表せ。

(3)　三角形 ABC の面積を求めよ。

(4)　三角形 APC の面積が $2\sqrt{6}$ となるような s の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

$a,\ b$ は定数で，$ab>0$ とする。放物線 $C_1 : y=ax^2+b$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ at^2+b)$ における接線を l とし，放物線 $C_2 : y=ax^2$ と l で囲まれた図形の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1) l の方程式を求めよ。

(2) l と C_2 のすべての交点の x 座標を求めよ。

(3) 点 P が C_1 上を動くとき，S は点 P の位置によらず一定であることを示せ。

3

解答解説のページへ

座標平面上で，x 座標と y 座標がともに 0 以上の整数である点を，ここでは格子点とよぶ。格子点$(0,\ 0)$から格子点$(k,\ l)$へ，両端点がともに格子点であり長さが 1 の線分を用いて，格子点$(0,\ 0)$から順に最も少ない本数でつなぐ方法を数える。たとえば，格子点$(0,\ 0)$から格子点$(3,\ 1)$へつなぐ方法の数は 4 である。次の問いに答えよ。

(1)　格子点$(0,\ 0)$から格子点$(4,\ 0)$へつなぐ方法の数と，格子点$(0,\ 0)$から格子点$(2,\ 2)$へつなぐ方法の数を，それぞれ求めよ。

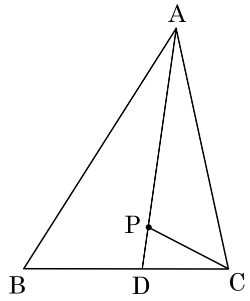
(2)　条件 $k+l=5$ を満たす格子点$(k,\ l)$を考える。格子点$(0,\ 0)$から格子点$(k,\ l)$へつなぐ方法の数を，この条件を満たすすべての格子点について足し合わせた数を求めよ。

(3)　条件 $k+l=n$ $(n\geqq 1)$ を満たす格子点$(k,\ l)$を考える。格子点$(0,\ 0)$から格子点$(k,\ l)$へつなぐ方法の数を，この条件を満たすすべての格子点について足し合わせた数を n を用いて表せ。

(4)　条件 $k+l=n$ (k と l はともに偶数で，$n\geqq 2$) を満たす格子点$(k,\ l)$を考える。格子点$(0,\ 0)$から格子点$(k,\ l)$へつなぐ方法の数を，この条件を満たすすべての格子点について足し合わせた数を n を用いて表せ。

1

問題のページへ



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+s\overrightarrow{\mathrm{PB}}+3\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ より，

$$-\overrightarrow{\mathrm{AP}}+s(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+3(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\vec{0}$$

すると，$(s+4)\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{s}{s+4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{3}{s+4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

よって，$\alpha=\dfrac{s}{s+4}$，$\beta=\dfrac{3}{s+4}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}\ \ (k>1)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{sk}{s+4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{3k}{s+4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

点 D は BC 上にあるので，$\dfrac{sk}{s+4}+\dfrac{3k}{s+4}=1$ より，

$$\frac{s+3}{s+4}k=1,\ k=\frac{s+4}{s+3}$$

すると，$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=3:s$，$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=1:(k-1)=1:\dfrac{1}{s+3}=(s+3):1$ となり，

$$\frac{|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|}=\frac{3}{s},\ \frac{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PD}}|}=s+3$$

(3)　$\triangle\mathrm{ABC}$ に余弦定理を適用すると，$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{7^2+6^2-5^2}{2\cdot7\cdot6}=\dfrac{5}{7}$ より，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot7\cdot6\cdot\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}=21\cdot\frac{2\sqrt{6}}{7}=6\sqrt{6}$$

(4)　$\triangle\mathrm{APC}=\dfrac{1}{k}\triangle\mathrm{ADC}=\dfrac{s+3}{s+4}\triangle\mathrm{ADC}=\dfrac{s+3}{s+4}\cdot\dfrac{s}{s+3}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{6\sqrt{6}s}{s+4}$

条件より，$\dfrac{6\sqrt{6}s}{s+4}=2\sqrt{6}$ なので $3s=s+4$ となり，$s=2$ である。

［解　説］

平面ベクトルの三角形への応用問題です。基本的なので，ミスが致命傷となります。

$\boxed{2}$　問題のページへ

(1)　$C_1 : y = ax^2 + b \quad (ab > 0)$ に対して，$y' = 2ax$ となる。

そこで，点 $\mathrm{P}(t,\ at^2 + b)$ における接線 l は,

$$y - (at^2 + b) = 2at(x - t),\ \ y = 2atx - at^2 + b \cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　$(*)$と $C_2 : y = ax^2$ を連立すると，$ax^2 = 2atx - at^2 + b$ となり,

$$ax^2 - 2atx + at^2 - b = 0$$

すると，l と C_2 の交点の x 座標は，$x = \dfrac{at \pm \sqrt{a^2t^2 - a(at^2 - b)}}{a} = \dfrac{at \pm \sqrt{ab}}{a}$

(3)　(2)より，$\alpha = \dfrac{at - \sqrt{ab}}{a}$，$\beta = \dfrac{at + \sqrt{ab}}{a}$ とおくと，$x = \alpha$ と $x = \beta$ の間で，l と C_2 の上下関係は変わらないので，l と C_2 によって囲まれた図形の面積 S は,

$$S = \left| \int_\alpha^\beta (2atx - at^2 + b - ax^2)\,dx \right| = \left| \int_\alpha^\beta -a(x - \alpha)(x - \beta)\,dx \right|$$

$$= \left| \frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3 \right| = \left| \frac{a}{6}\Big(\frac{2\sqrt{ab}}{a}\Big)^3 \right| = \left| \frac{a}{6}\cdot\frac{8ab\sqrt{ab}}{a^3} \right| = \frac{4b}{3a}\sqrt{ab}$$

よって，点 P が C_1 上を動くとき，S は点 P の位置によらず一定である。

［解　説］

定積分と面積に関する基本問題です。a の符号で場合分けをしても構いませんが，記述量は多くなります。

3

問題のページへ

(1)　まず，長さ 1 の線分を用いて，格子点を x 軸に平行につなぐことを→，y 軸に平行につなぐことを↑と表す。

さて，$(0,\ 0)$ から $(4,\ 0)$ へつなぐには，4 個の→を 1 列に並べることより，その方法は 1 通りである。

また，$(0,\ 0)$ から $(2,\ 2)$ へつなぐには，2 個の→，2 個の↑を 1 列に並べることより，その方法は $\dfrac{4!}{2!2!}=6$ 通りである。

(2)　$k+l=5$ のとき，$(0,\ 0)$ から $(k,\ l)=(k,\ 5-k)$ へつなぐには，k 個の→，$5-k$ 個の↑を 1 列に並べることより，その方法は $\dfrac{5!}{k!(5-k)!}={}_5\mathrm{C}_k$ 通りである。

このとき，すべての格子点 $(k,\ l)$ について足し合わせた総数は，

$${}_5\mathrm{C}_0+{}_5\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_4+{}_5\mathrm{C}_5=(1+1)^5=32$$

(3)　$k+l=n$ のとき，$(0,\ 0)$ から $(k,\ l)=(k,\ n-k)$ へつなぐには，k 個の→，$n-k$ 個の↑を 1 列に並べることより，その方法は $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}={}_n\mathrm{C}_k$ 通りである。

このとき，すべての格子点 $(k,\ l)$ について足し合わせた総数は，

$${}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=(1+1)^n=2^n\cdots\cdots\cdots(*)$$

(4)　$k,\ l$ がともに偶数で $k+l=n$ のとき，$(0,\ 0)$ から $(k,\ l)=(k,\ n-k)$ へつなぐ方法について，すべての格子点 $(k,\ l)$ について足し合わせた総数 N は，

$$N={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_4+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n$$

ここで，${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=(1-1)^n=0$ から，$(*)$と合わせると，

$$N=\frac{1}{2}\{(1+1)^n+(1-1)^n\}=2^{n-1}$$

［解　説］

格子点が題材として設定されていますが，内容は有名な経路問題です。合わせて二項定理も絡んでいます。なお，設問(2)(3)(4)の問題文の日本語は少しヘンです。意味は通りますが。