$\boxed{1}$ 解答解説のページへ

四面体 OABC において，3 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ はどの 2 つも互いに垂直であり，$h>0$ に対して，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=h$ とする。3 点 O, A, B を通る平面上の点 P は，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ のどちらとも垂直となる点であるとする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とするとき，$\alpha$ と $\beta$ を $h$ を用いて表せ。

(2) 直線 OP と直線 AB が直交していることを示せ。

(3) $\triangle$PAB は，辺 AB を底辺とする二等辺三角形ではないことを示せ。

**2**　　解答解説のページへ

関数 $f(x)=xe^x$ について，次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=f(x)$ について，増減および凹凸を調べ，そのグラフをかけ。ただし，必要ならば $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ を用いてもよい。

(2)　不定積分 $\int xe^x dx$，$\int x^2e^{2x}dx$ をそれぞれ求めよ。

(3)　$0\leqq t\leqq 1$ に対し，$g(x)=f(x)-f(t)$ とおく。$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で，曲線 $y=g(x)$ と $x$ 軸ではさまれる部分を，$x$ 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を $V(t)$ とする。$V(t)$ を求めよ。

(4)　(3)の $V(t)$ が最小値をとるときの $t$ の値を $a$ とする。最小値 $V(a)$ と，$f(a)$ の値を求めよ。ただし，$a$ の値は求める必要はない。

**3**

解答解説のページへ

関数 $y=\log_3 x$ とその逆関数 $y=3^x$ のグラフが，直線 $y=-x+s$ と交わる点をそれぞれ $\mathrm{P}(t,\ \log_3 t)$，$\mathrm{Q}(u,\ 3^u)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 線分 PQ の中点の座標は，$\left(\dfrac{s}{2},\ \dfrac{s}{2}\right)$ であることを示せ。

(2) $s,\ t,\ u$ は $s=t+u$，$u=\log_3 t$ であることを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{t\to 3}\frac{su-k}{t-3}$ が有限な値となるように，定数 $k$ の値を定め，その極限値を求めよ。

**4**

解答解説のページへ

$a>1$ とする。無限等比級数

$$a+ax(1-ax)+ax^2(1-ax)^2+ax^3(1-ax)^3+\cdots\cdots$$

が収束するとき，その和を $S(x)$ とする。次の問いに答えよ。

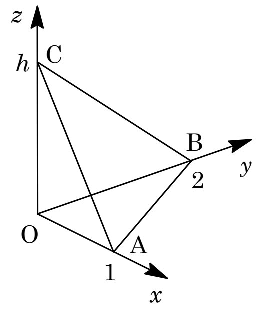
(1)　この無限等比級数が収束するような実数 $x$ の値の範囲を求めよ。また，そのときの $S(x)$ を求めよ。

(2)　$x$ が(1)で求めた範囲を動くとき，$S(x)$ のとり得る値の範囲を求めよ。

(3)　$I(a)=\int_0^{\frac{1}{a}} S(x)dx$ とおくとき，極限値 $\lim_{a\to\infty} I(a)$ を求めよ。

**1**

問題のページへ




(1)　条件より，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$は，どの 2 つも互いに垂直であり，$|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=2$，$|\overrightarrow{OC}|=h$ $(h>0)$なので，右図のように，点 O を原点としてとり，A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 2,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ h)$とおくことができる。

これより，$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}=(\alpha,\ 2\beta,\ 0)$となり，

$$\overrightarrow{CP}=(\alpha,\ 2\beta,\ -h)$$

また，$\overrightarrow{CA}=(1,\ 0,\ -h)$，$\overrightarrow{CB}=(0,\ 2,\ -h)$である。

すると，条件から，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA}=0$，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CB}=0$となるので，

$$\alpha+h^2=0,\quad 4\beta+h^2=0$$

よって，$\alpha=-h^2$，$\beta=-\dfrac{1}{4}h^2$である。

(2)　(1)より，$\overrightarrow{OP}=\left(-h^2,\ -\dfrac{1}{2}h^2,\ 0\right)=-\dfrac{h^2}{2}(2,\ 1,\ 0)$

また，$\overrightarrow{AB}=(-1,\ 2,\ 0)$より，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=-\dfrac{h^2}{2}(-2+2+0)=0$

よって，直線 OP と直線 AB は直交している。

(3)　線分 AB の中点を M とすると，$\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=\left(\dfrac{1}{2},\ 1,\ 0\right)$

すると，$\overrightarrow{OP}$は$\overrightarrow{OM}$の定数倍とはならないので，3 点 O, P, M は同一直線上にない。すなわち，点 P は線分 AB の垂直二等分線上の点ではない。

よって，△PAB は，辺 AB を底辺とする二等辺三角形ではない。

［解　説］

与えられた条件から，座標系を設定しています。すると，続きは成分計算となります。なお，普通に計算していっても，記述量はやや多くなる程度です。

**2**

問題のページへ

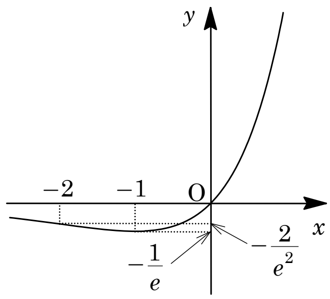
(1)　$f(x)=xe^x$ に対し，

$$f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$$

$$f''(x)=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$$

すると，$y=f(x)$ の増減および凹凸は右表のようになり，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}xe^x=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}xe^x=\infty$ から，グラフは右図のようになる。

| $x$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $f(x)$ | | $-\dfrac{2}{e^2}$ | | $-\dfrac{1}{e}$ | |




(2)　$$\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=(x-1)e^x+C$$

$$\int x^2e^{2x}dx=\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\int xe^{2x}dx$$

$$=\frac{1}{2}(x^2-x)e^{2x}+\frac{1}{2}\int e^{2x}dx=\frac{1}{4}(2x^2-2x+1)e^{2x}+C$$

(3)　$0\leqq t\leqq 1$ に対し，$g(x)=f(x)-f(t)$ とおくと，

$$g(x)\leqq 0\ (0\leqq x\leqq t),\ g(x)\geqq 0\ (t\leqq x\leqq 1)$$

曲線 $y=g(x)$ と $x$ 軸ではさまれる部分を，$x$ 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 $V(t)$ は，(2)の結果を利用すると，

$$V(t)=\pi\int_0^1\{g(x)\}^2dx=\pi\int_0^1\{f(x)-f(t)\}^2dx=\pi\int_0^1(xe^x-te^t)^2dx$$

$$=\pi\int_0^1x^2e^{2x}dx-2\pi te^t\int_0^1xe^xdx+\pi t^2e^{2t}\int_0^1dx$$

$$=\frac{\pi}{4}\Big[(2x^2-2x+1)e^{2x}\Big]_0^1-2\pi te^t\Big[(x-1)e^x\Big]_0^1+\pi t^2e^{2t}$$

$$=\frac{\pi}{4}(e^2-1)-2\pi te^t\cdot 1+\pi t^2e^{2t}=\pi\left(t^2e^{2t}-2te^t+\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}\right)$$

(4)　$$V'(t)=\pi(2te^{2t}+2t^2e^{2t}-2e^t-2te^t)$$

$$=2\pi e^t(te^t+t^2e^t-1-t)$$

$$=2\pi e^t(t+1)(te^t-1)$$

| $t$ | $0$ | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $V'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $V(t)$ | | ↘ | | ↗ | |

ここで，$te^t=1$ すなわち $f(t)=1$ の解は，(1)から $0<t<1$ にただ 1 つあり，これを $t=\alpha$ とおくと，$V(t)$ の増減は上表のようになる。すると，$V(t)$ は $t=\alpha$ で最小となるので $a=\alpha$ であり，$f(a)=1$

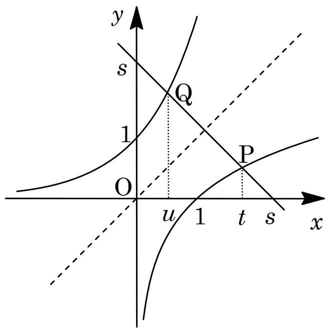
$$V(a)=\pi\left(1^2-2\cdot 1+\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}(e^2-5)\pi$$

［解　説］

計算量が標準的な，微積分の総合問題です。(4)は $V'(t)$ の因数分解が気づきにくいのですが，ヒントは $f(a)$ の値を求めるという設問です。

$\boxed{3}$

問題のページへ




(1)　$y=\log_3 x$ ……①と $y=3^x$ ……②のグラフは，直線 $y=x$ ……③に関して対称である。

また，直線 $y=-x+s$ ……④は，直線 $y=x$ に関して対称となっている。

すると，①と④の交点 $\mathrm{P}(t,\ \log_3 t)$ と，②と④の交点 $\mathrm{Q}(u,\ 3^u)$ は，直線 $y=x$ に関して対称である。

これより，線分 PQ の中点は直線 $y=x$ 上にあり，③と④を連立すると，$x=-x+s$，$x=y=\dfrac{s}{2}$ である。

よって，中点の座標は $\left(\dfrac{s}{2},\ \dfrac{s}{2}\right)$ となる。

(2)　(1)より，$\dfrac{t+u}{2}=\dfrac{s}{2}$ となるので，$s=t+u$ である。

また，点 P, Q が直線 $y=x$ に関して対称であることより，

$$t=3^u,\ u=\log_3 t$$

(3)　(2)より，$\dfrac{su-k}{t-3}=\dfrac{(t+\log_3 t)\log_3 t-k}{t-3}=\dfrac{(\log_3 t)^2+t\log_3 t-k}{t-3}$

ここで，$t\to3$ のとき $t-3\to0$ となるので，$\displaystyle\lim_{t\to3}\frac{su-k}{t-3}$ が有限な値となるためには，$t\to3$ のとき $(\log_3 t)^2+t\log_3 t-k\to0$ となることが必要であり，

$$(\log_3 3)^2+3\log_3 3-k=0,\ k=1^2+3\cdot1=4$$

さて，$f(t)=(\log_3 t)^2+t\log_3 t$ とおくと，$f(3)=4$ であり，

$$f'(t)=\frac{2\log_3 t}{t\log3}+\log_3 t+\frac{t}{t\log3}=\frac{2\log_3 t}{t\log3}+\log_3 t+\frac{1}{\log3}$$

よって，$\dfrac{su-k}{t-3}=\dfrac{(\log_3 t)^2+t\log_3 t-4}{t-3}=\dfrac{f(t)-f(3)}{t-3}$ となり，

$$\lim_{t\to3}\frac{su-k}{t-3}=f'(3)=\frac{2}{3\log3}+1+\frac{1}{\log3}=1+\frac{5}{3\log3}$$

［解　説］

関数の極限についての問題です。ただ，上の解答例(1)(2)は「明らか」ということを記しているにすぎません。これでよいのかと戸惑ってしまいます。

## 4

問題のページへ

(1)　$a>1$ のとき，無限等比級数 $a+ax(1-ax)+ax^2(1-ax)^2+ax^3(1-ax)^3+\cdots\cdots$ が収束する条件は，$-1<x(1-ax)<1$ ……$(*)$である。

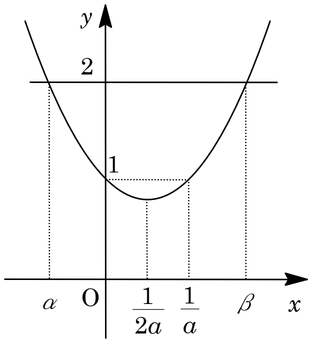
$(*)$の左側の不等式は，$ax^2-x-1<0$ となり，$\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2a}<x<\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2a}$

$(*)$の右側の不等式は，$ax^2-x+1>0$ となる，$ax^2-x+1=0$ の $D=1-4a<0$ から，つねに成り立つ。

よって，求める条件は，$\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2a}<x<\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2a}$ であり，このとき，

$$S(x)=\frac{a}{1-x(1-ax)}=\frac{a}{ax^2-x+1}$$

(2)　まず，$f(x)=ax^2-x+1=a\left(x-\dfrac{1}{2a}\right)^2+1-\dfrac{1}{4a}$ とおくと，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。




また，$\alpha=\dfrac{1-\sqrt{1+4a}}{2a}$，$\beta=\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2a}$ とおくと，$\alpha$，$\beta$ は，$ax^2-x-1=0$ すなわち $f(x)=2$ の解となる。

そこで，$\alpha<x<\beta$ において，$f(x)$ のとり得る値は，

$$1-\frac{1}{4a}\leqq f(x)<2$$

すると，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{f(x)}\leqq\dfrac{4a}{4a-1}$ より，$\dfrac{a}{2}<S(x)\leqq\dfrac{4a^2}{4a-1}$ である。

(3)　$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{a}$ において，$1-\dfrac{1}{4a}\leqq f(x)\leqq 1$ となるので，$a\leqq S(x)\leqq\dfrac{4a^2}{4a-1}$ より，

$$\int_0^{\frac{1}{a}}a\,dx\leqq\int_0^{\frac{1}{a}}S(x)\,dx\leqq\int_0^{\frac{1}{a}}\frac{4a^2}{4a-1}dx,\ \ a\cdot\frac{1}{a}\leqq I(a)\leqq\frac{4a^2}{4a-1}\cdot\frac{1}{a}$$

よって，$1\leqq I(a)\leqq\dfrac{4a}{4a-1}$ から，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}I(a)=1$ である。

### ［解　説］

無限等比級数の収束条件を題材とした問題です。(2)が(3)のストレートな誘導となっている佇まいですが，そうではありませんでした。