1　解答解説のページへ

座標空間内に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(3,\ 3,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 6,\ 0)$ をとり，さらに $1<a<3$ を満たす定数 a に対して点 $\mathrm{P}(t,\ ta,\ ta)$ をとる。ただし，t は $t>0$ の範囲を動くものとする。次の問いに答えよ。

(1)　点 P から xy 平面に垂線 PH を下ろす。点 H の座標を求めよ。

(2)　点 H が線分 AB 上にあるときの t の値を求め，そのときの点 H の座標を a を用いて表せ。

以下，点 H は線分 AB 上にあるとする。

(3)　点 M を線分 AB の中点とする。AH : HM の比の値 $\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HM}}$ を求めよ。

(4)　四面体 OPMH の体積が 2 となるような a の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

平面上の 2 つの曲線$C_1 : x^2+(y-5)^2=16$，$C_2 : y=\dfrac{1}{4}x^2$を考える。次の問いに答えよ。

(1)　C_1とC_2の共有点の座標を求めよ。

(2)　C_1とC_2を同一平面上に図示せよ。

(3)　C_1とC_2で囲まれた図形の面積を求めよ。

3

解答解説のページへ

A, B, C の 3 人がそれぞれ 1 個ずつのサイコロを同時に投げ，出た目の大きさの順に $x_1 \leqq x_2 \leqq x_3$ とする。$x_1 = x_2 = x_3$ のときは，もう一度 3 人でサイコロ投げを行う。$x_1 \leqq x_2 < x_3$ のときは，x_3 を出した者が勝者となり，サイコロ投げを終了する。$x_1 < x_2 = x_3$ のときは，x_1 を出した者は去り，残りの 2 人で異なる目が出るまでサイコロ投げを続け，大きい目を出した者が勝者となり，サイコロ投げを終了する。次の問いに答えよ。

(1) 1 回目のサイコロ投げで A が 3 を出して勝者となる場合の数を求めよ。

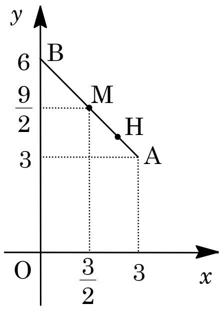
(2) 1 回目のサイコロ投げで A が勝者となる場合の数を求めよ。

(3) 1 回目のサイコロ投げで勝者が決まる場合の数を求めよ。

(4) 2 回目のサイコロ投げで勝者が決まる場合の数を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　点$\mathrm{P}(t,\ ta,\ ta)$からxy平面に垂線PHを下ろしたとき，点Hの座標は$\mathrm{H}(t,\ ta,\ 0)$となる。

(2)　$\mathrm{A}(3,\ 3,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 6,\ 0)$に対し，線分ABは，

$$x+y=6\ (0\leqq x\leqq 3),\ z=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

点Hが線分AB上にあるので，①より，

$$t+ta=6\quad (0\leqq t\leqq 3)\cdots\cdots\cdots ②$$

すると，②より$t=\dfrac{6}{a+1}$となり，$1<a<3$から$\dfrac{3}{2}<\dfrac{6}{a+1}<3$であるので，線分AB上にあることがわかる。

よって，$t=\dfrac{6}{a+1}$，$\mathrm{H}\left(\dfrac{6}{a+1},\ \dfrac{6a}{a+1},\ 0\right)$である。

(3)　線分ABの中点Mは，$\mathrm{M}\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{9}{2},\ 0\right)$となり，

$$\mathrm{AH}:\mathrm{HM}=\left(3-\frac{6}{a+1}\right):\left(\frac{6}{a+1}-\frac{3}{2}\right)=\frac{3(a-1)}{a+1}:\frac{3(3-a)}{2(a+1)}$$

よって，$\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HM}}=\dfrac{2(a-1)}{3-a}$である。

(4)　(3)から，$\mathrm{HM}:\mathrm{AB}=\dfrac{3(3-a)}{2(a+1)}:3=\dfrac{3-a}{2(a+1)}:1$なので，

$$\triangle\mathrm{OHM}=\frac{3-a}{2(a+1)}\triangle\mathrm{OAB}=\frac{3-a}{2(a+1)}\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3=\frac{9(3-a)}{2(a+1)}$$

さて，四面体OPMHの体積は2なので，$\mathrm{PH}=\dfrac{6a}{a+1}$から，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{9(3-a)}{2(a+1)}\cdot\frac{6a}{a+1}=2,\ 9a(3-a)=2(a+1)^2,\ 11a^2-23a+2=0$$

すると，$(11a-1)(a-2)=0$となり，$1<a<3$から$a=2$である。

［解　説］

空間座標に関する基本的な問題です。

2

問題のページへ

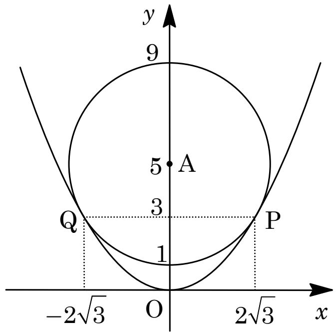
(1)　$C_1 : x^2+(y-5)^2=16$ ……①，$C_2 : y=\dfrac{1}{4}x^2$ ……②に対し，①②を連立すると，

$$4y+(y-5)^2=16\ ,\ \ y^2-6y+9=0$$

すると，$(y-3)^2=0$ から $y=3$ となり，②より $x=\pm2\sqrt{3}$

よって，C_1 と C_2 の共有点の座標は，$(2\sqrt{3},\ 3)$，$(-2\sqrt{3},\ 3)$ である。

(2)　C_1 の中心を $\mathrm{A}(0,\ 5)$，C_1 と C_2 の共有点を P，Q とおき C_1，C_2 を図示すると，右図のようになる。



(3)　(2)から，線分 AP の傾きが $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となるので，

$$\angle\mathrm{OAP}=\frac{\pi}{3}$$

ここで，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S とすると，y 軸に関する対称性より，

$$\frac{S}{2}=\frac{1}{2}(3+5)\cdot2\sqrt{3}-\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{1}{4}x^2dx-\frac{1}{2}\cdot4^2\cdot\frac{\pi}{3}$$

$$=8\sqrt{3}-\frac{1}{12}\Big[x^3\Big]_0^{2\sqrt{3}}-\frac{8}{3}\pi=8\sqrt{3}-2\sqrt{3}-\frac{8}{3}\pi=6\sqrt{3}-\frac{8}{3}\pi$$

よって，$S=12\sqrt{3}-\dfrac{16}{3}\pi$ である。

［解　説］

円と放物線の関係を題材とした基本題です。また，(3)の面積は，台形を利用すると，簡単な計算で求まります。

3

問題のページへ

(1) A, B, C がサイコロを同時に投げるとき，出た目をそれぞれ a, b, c とする。

さて，1 回目のサイコロ投げで A が 3 を出して勝者となるのは，$a=3$，$b\leqq 2$，$c\leqq 2$ のときで，その場合の数は，$1\times 2^2=4$ である。

(2) 1 回目のサイコロ投げで A が勝者となるのは，$a=k\ (2\leqq k\leqq 6)$ の場合，$b\leqq k-1$，$c\leqq k-1$ のときで，その場合の数は，

$$1\times 1^2+1\times 2^2+1\times 3^2+1\times 4^2+1\times 5^2=55$$

(3) 1 回目のサイコロ投げで, B, C が勝者となる場合も同様なので, 1 回目で勝者が決まる場合の数は, (2)より，$55\times 3=165$ である。

(4) 2 回目のサイコロ投げで勝者が決まるのは, 次の場合がある。

(i) 1 回目のサイコロ投げで $a=b=c$ のとき

1 回目は 6 通り，そして 2 回目で勝者が決まるのは, (3)から 165 通りずつであり，この場合の数は，$6\times 165=990$ である。

(ii) 1 回目のサイコロ投げで $a=b>c$ のとき

1 回目は $a=b=k\ (2\leqq k\leqq 6)$，$c\leqq k-1$ のときで，その場合の数は,

$$1^2\times 1+1^2\times 2+1^2\times 3+1^2\times 4+1^2\times 5=15$$

2 回目は A と B でサイコロを投げ，どちらかが勝者となるのは，異なる目が出たときなので，その場合の数は $6^2-6=30$ である。

よって，このとき 2 回目で勝者が決まる場合の数は，$15\times 30=450$ である。

(iii) 1 回目のサイコロ投げで $a=c>b$ のとき　(ii)と同じく 450 通りある。

(iv) 1 回目のサイコロ投げで $b=c>a$ のとき　(ii)と同じく 450 通りある。

(i)～(iv)より，2 回目で勝者が決まる場合の数は，$990+450\times 3=2340$ である。

［解 説］

場合の数に関する基本問題です。誘導も丁寧すぎるほどです。