1

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$と$\{b_n\}$は

$$a_1=b_1=2,\ a_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{4}a_n-\frac{\sqrt{6}}{4}b_n,\ b_{n+1}=\frac{\sqrt{6}}{4}a_n+\frac{\sqrt{2}}{4}b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすものとする。a_nを実部としb_nを虚部とする複素数をz_nで表すとき，次の問いに答えよ。

(1)　$z_{n+1}=wz_n$を満たす複素数wと，その絶対値$|w|$を求めよ。

(2)　複素数平面上で，点z_{n+1}は点z_nをどのように移動した点であるか答えよ。

(3)　数列$\{a_n\}$と$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(4)　複素数平面上の 3 点 0，z_n，z_{n+1}を頂点とする三角形の周と内部を黒く塗りつぶしてできる図形をT_nとする。このとき，複素数平面上でT_1，T_2，…，T_n，…によって黒く塗りつぶされる領域の面積を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

曲線$C : x^2 + 4y^2 = 4$上を動く点 P と，C 上の定点Q(2, 0)，R(0, 1)がある。次の問いに答えよ。

(1) △PQR の面積の最大値と，そのときの P の座標を求めよ。

(2) (1)で求めた点 P に対して直線 PQ を考える。曲線 C によって囲まれた図形を直線 PQ で 2 つに分けたとき，直線 PQ の下方にある部分の面積を求めよ。

3

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $25x+9y=1$ の整数解をすべて求めよ。

(2)　方程式 $25x+9y=33$ の整数解をすべて求めよ。さらに，これらの整数解のうち，$|x+y|$ の値が最小となるものを求めよ。

(3)　2 つの方程式 $25x+9y=33$，$xy=-570$ を同時に満たす整数解をすべて求めよ。

4

解答解説のページへ

$a,\ b$ を実数とする。$f(x)=2\sqrt{1+x^2}-ax^2$ とし，x についての方程式 $f(x)=b$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) $a>0$ のとき，関数 $f(x)$ の最大値を求めよ。

(2) 方程式 $f(x)=b$ の異なる実数解の個数が最も多くなるときの点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ。

1

問題のページへ

(1)　$a_1 = b_1 = 2$，$a_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}a_n - \dfrac{\sqrt{6}}{4}b_n$，$b_{n+1} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}a_n + \dfrac{\sqrt{2}}{4}b_n$ に対して，

$$\begin{aligned}z_{n+1} &= a_{n+1} + b_{n+1}i = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}a_n - \frac{\sqrt{6}}{4}b_n\right) + \left(\frac{\sqrt{6}}{4}a_n + \frac{\sqrt{2}}{4}b_n\right)i \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}i\right)a_n + \left(\frac{\sqrt{6}}{4}i + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)b_n i = \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}i\right)(a_n + b_n i) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}i)z_n\end{aligned}$$

よって，$w = \dfrac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}i)$ となり，$|w| = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(2)　(1)から，$w = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ となり，点 z_{n+1} は点 z_n を原点まわりに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転し，原点との距離を $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 倍した点である。

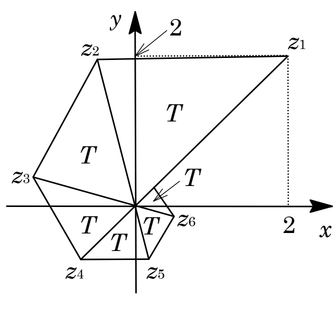
(3)　$z_{n+1} = wz_n$ より，$z_n = w^{n-1}z_1$ となり，

$$\begin{aligned}a_n + b_n i &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\left(\cos\frac{n-1}{3}\pi + i\sin\frac{n-1}{3}\pi\right)(2+2i) \\ &= 2\cdot 2^{-\frac{n-1}{2}}\left(\cos\frac{n-1}{3}\pi + i\sin\frac{n-1}{3}\pi + i\cos\frac{n-1}{3}\pi - \sin\frac{n-1}{3}\pi\right) \\ &= 2^{-\frac{n-3}{2}}\left\{\left(\cos\frac{n-1}{3}\pi - \sin\frac{n-1}{3}\pi\right) + i\left(\sin\frac{n-1}{3}\pi + \cos\frac{n-1}{3}\pi\right)\right\} \\ &= 2^{-\frac{n-3}{2}}\cdot\sqrt{2}\left\{\cos\left(\frac{n-1}{3}\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{n-1}{3}\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right\} \\ &= 2^{-\frac{n-4}{2}}\left\{\cos\left(\frac{n}{3} - \frac{1}{12}\right)\pi + i\sin\left(\frac{n}{3} - \frac{1}{12}\right)\pi\right\}\end{aligned}$$

よって，$a_n = 2^{-\frac{n-4}{2}}\cos\left(\dfrac{n}{3} - \dfrac{1}{12}\right)\pi$，$b_n = 2^{-\frac{n-4}{2}}\sin\left(\dfrac{n}{3} - \dfrac{1}{12}\right)\pi$ である。

(4)　3 点 0，z_n，z_{n+1} を頂点とする三角形の周と内部を T_n とすると，T_n と T_{n+1} は相似となり，その比は $|w| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である。ここで，T_n の面積を S_n とおくと，

$$S_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 S_n = \frac{1}{2}S_n$$



T_7，T_8，… は右図の T_1 から T_6 の和集合に含まれるので，求める面積は，$S_1 = \dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\sin\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{6}$ より，

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_6 = \sqrt{6}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}\left(1 - \frac{1}{2}\right)^{-1} = 2\sqrt{6}\cdot\frac{63}{64} = \frac{63}{32}\sqrt{6}$$

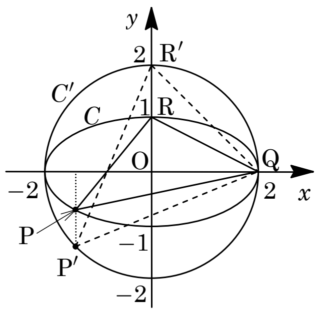
［解　説］

複素数平面上の回転・拡大をテーマとした標準的な問題です。

© 電送数学舎 2016

$\boxed{2}$

問題のページへ



(1)　まず，楕円 $C: x^2+4y^2=4$ を y 軸方向に 2 倍拡大して，円 $C': x^2+y^2=4$ をつくるとする。

　このとき，点 P は P'，点 $\mathrm{R}(0,\ 1)$ は $\mathrm{R}'(0,\ 2)$ に対応し，点 $\mathrm{Q}(2,\ 0)$ の位置は変わらない。

　すると，$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{P'QR'}$ より，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積が最大になるのは，$\triangle\mathrm{P'QR'}$ の面積が最大のときである。

　このときの点 P' の座標は，直線 $y=x$ に関する対称性から，$\mathrm{P}'\left(2\cos\dfrac{5}{4}\pi,\ 2\sin\dfrac{5}{4}\pi\right)$ すなわち $\mathrm{P}'(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$ である。また最大値は，

$$\triangle\mathrm{P'QR'}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}=2+2\sqrt{2}$$

　よって，$\triangle\mathrm{PQR}$ は $\mathrm{P}\left(-\sqrt{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ のときに最大となり，最大値は，

$$\frac{1}{2}(2+2\sqrt{2})=1+\sqrt{2}$$

(2)　(1)と同様にして，円 C' の内側で直線 $\mathrm{P'Q}$ の下方にある部分の面積は，

$$\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\sin\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi-\sqrt{2}$$

　よって，楕円 C の内側で直線 PQ の下方にある部分の面積は，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\pi-\sqrt{2}\right)=\frac{3}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

［解　説］

　楕円を円に変換して処理する解法を採用しました。そうすると，計算はほとんど不要といってよいぐらいの解答例になります。

© 電送数学舎 2016

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　整数 x, y に対して $25x+9y=1$ のとき，$25\times 4+9\times(-11)=1$ ……①より，

$$25(x-4)+9(y+11)=0\,,\ \ 25(x-4)=-9(y+11)$$

25 と 9 は互いに素なので，k を整数として，

$$x-4=9k\,,\ \ y+11=-25k$$

よって，$x=9k+4$，$y=-25k-11$ となる。

(2)　整数 x, y に対して $25x+9y=33$ のとき，①より $25\times 132+9\times(-363)=33$

$$25(x-132)+9(y+363)=0\,,\ \ 25(x-132)=-9(y+363)$$

25 と 9 は互いに素なので，l を整数として，

$$x-132=9l\,,\ \ y+363=-25l$$

よって，$x=9l+132$，$y=-25l-363$ となり，このとき，

$$|x+y|=|9l+132-25l-363|=|-16l-231|=|-16(l+14)-7|$$

すると，$l=-14$ ($x=6$, $y=-13$) のとき，$|x+y|$ の値は最小となる。

(3)　条件より，整数 x, y に対して $25x+9y=33$ ………②，$xy=-570$ ………③

(2)の結果を利用すると，②より，

$$x=9l+132=9(l+14)+6\,,\ \ y=-25l-363=-25(l+14)-13$$

ここで，$m=l+14$ とおくと，$x=9m+6$，$y=-25m-13$

③に代入すると，$(9m+6)(-25m-13)=-570$ となり，

$$(3m+2)(25m+13)=190\,,\ \ 75m^2+89m-164=0$$

すると，$(75m+164)(m-1)=0$ となり，m は整数から $m=1$ なので，

$$x=15\,,\ \ y=-38$$

［解　説］

不定方程式を解く問題です。(1)の特殊解は $100-99=1$ から山勘で見つかると思いますが，(2)は運・不運が反映されます。少し大きな値となり気になりましたが，①を利用した確実なものを採用しました。ただ，(3)になるとそうもいかず，(2)の後半の設問を誘導とみて，文字の置換えをしています。

© 電送数学舎 2016

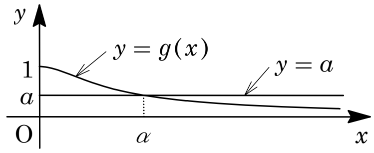
$\boxed{4}$ 問題のページへ

(1)　$a>0$ のとき，$f(x)=2\sqrt{1+x^2}-ax^2$ に対して，$f(-x)=f(x)$ から $y=f(x)$ のグラフは y 軸対称となる。そこで，以下，$x\geqq 0$ で考える。

$$f'(x)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}-2ax=2x\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-a\right)$$

ここで，$g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ とおくと，$x\geqq 0$ において $g(x)$ は単調に減少し，

$$1=g(0)\geqq g(x)>\lim_{x\to\infty}g(x)=0$$



(i)　$0<a<1$ のとき

$g(\alpha)=a$ となる α が $\alpha>0$ でただ 1 つ存在し，このとき $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	2	$\nearrow$		$\searrow$

すると，$\dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}=a$ から $1+\alpha^2=\dfrac{1}{a^2}$ となり，$f(x)$ の最大値は,

$$f(\alpha)=2\sqrt{1+\alpha^2}-a\alpha^2=\frac{2}{a}-a\left(\frac{1}{a^2}-1\right)=a+\frac{1}{a}$$

(ii)　$a\geqq 1$ のとき

$x\geqq 0$ において $f'(x)\leqq 0$ となり，$f(x)$ の最大値は $f(0)=2$ である。

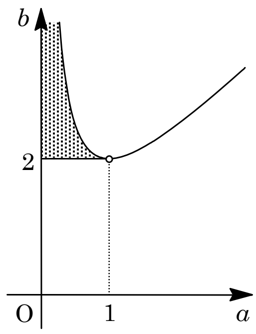
(2)　$a>0$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$ となり，ある b における方程式 $f(x)=b$ の異なる実数解の個数の最大数は，$0<a<1$ のとき 4 個，$a\geqq 1$ のとき 2 個である。

$a\leqq 0$ のとき，$x\geqq 0$ において $f(x)$ は単調に増加するので，ある b における方程式 $f(x)=b$ の異なる実数解の個数の最大数は 2 個である。

したがって，方程式 $f(x)=b$ の異なる実数解の個数の最大数は 4 個であり，このとき，

$$0<a<1,\ 2<b<a+\frac{1}{a}$$

そして，相加平均と相乗平均の関係から $a+\dfrac{1}{a}\geqq 2$ に注意して点 $(a,\ b)$ の範囲を図示すると，右図の網点部になる。ただし，境界は領域に含まない。



［解　説］

場合分けをして増減を考えるという微分の応用の典型題です。なお，(3)の領域の境界線は有名ですので，増減表などのプロセスは省略しています。

© 電送数学舎 2016