1

解答解説のページへ

　△ABC において，∠A は直角で，∠B＜∠C とし，BC＝2 とする。∠B＝θ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　辺 AB, AC の長さ，および△ABC の面積 S を θ を用いて表せ。

(2)　△ABC の内接円 O の半径 r を θ を用いて表せ。

(3)　辺 BC の垂直二等分線が，内接円 O と接するとき，θ と r の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。ただし，${}_m\mathrm{C}_k$ は m 個から k 個取る組合せの総数を表す。

(1)　$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ に対して，${}_7\mathrm{C}_k$ は 7 の倍数であることを示せ。

(2)　p は素数とし，k は $1 \leqq k \leqq p-1$ を満たす自然数とする。${}_p\mathrm{C}_k$ は p の倍数であることを示せ。

(3)　すべての自然数 n に対して，n^7-n は 7 の倍数であることを数学的帰納法を用いて示せ。

3

解答解説のページへ

$a>0$ とし，放物線 $C: y=a(x-1)^2+1$ を考える。C 上の点 P における C の接線 l の方程式を $y=Ax+B$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　P の x 座標を s とするとき，A と B を a と s を用いて表せ。

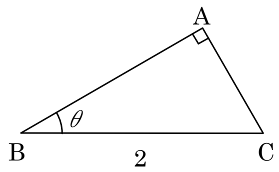
(2)　接線 l は，原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通り，傾きは正であるとする。このとき，l の方程式を求めよ。

(3)　(2)で求めた接線 l と放物線 C および y 軸で囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4)　$\dfrac{S(a)}{\sqrt[4]{a}}$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

1

問題のページへ

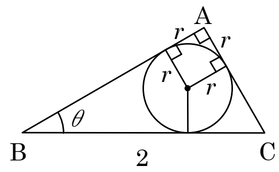


(1)　$\triangle$ABC は，$\angle\mathrm{A}=\dfrac{\pi}{2}$，$\mathrm{BC}=2$，$\angle\mathrm{B}=\theta$，$\angle\mathrm{B}<\angle\mathrm{C}$ より，

$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ となり，

$$\mathrm{AB}=2\cos\theta,\ \ \mathrm{AC}=2\sin\theta$$

$\triangle$ABC の面積 S は，$S=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cos\theta\cdot 2\sin\theta=\sin 2\theta$

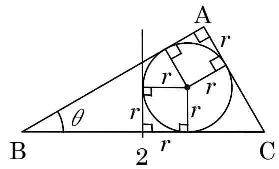


(2)　$\triangle$ABC の内接円 O の半径を r とすると，

$$(\mathrm{AB}-r)+(\mathrm{AC}-r)=\mathrm{BC}$$

$$(2\cos\theta-r)+(2\sin\theta-r)=2$$

よって，$r=\cos\theta+\sin\theta-1$ となる。



(3)　条件より，$\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}-r=\mathrm{AC}-r$ から $\mathrm{AC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}$ となり，

$$2\sin\theta=1,\ \ \theta=\frac{\pi}{6}$$

(2)より，$r=\cos\dfrac{\pi}{6}+\sin\dfrac{\pi}{6}-1=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

［解 説］

三角比の基本問題です。(2)は図形的に処理していますが, (1)で求めた面積を利用しても構いません。

2

問題のページへ

(1)　${}_7\mathrm{C}_1={}_7\mathrm{C}_6=7$，${}_7\mathrm{C}_2={}_7\mathrm{C}_5=21$，${}_7\mathrm{C}_3={}_7\mathrm{C}_4=35$ より，すべて 7 の倍数である。

(2)　p を素数, k を $1\leqq k\leqq p-1$ を満たす自然数とするとき，${}_p\mathrm{C}_k=\dfrac{p!}{k!\,(p-k)!}$ から，

$$k!\,(p-k)!\,{}_p\mathrm{C}_k=p!\cdots\cdots\cdots(*)$$

すると，$(*)$の右辺は p の倍数であるが，左辺の $k!$ および $(p-k)!$ は p の倍数ではない。よって，${}_p\mathrm{C}_k$ は p の倍数である。

(3)　すべての自然数 n に対して，n^7-n は 7 の倍数であることを示す。

(i)　$n=1$ のとき　$n^7-n=0$ より 7 の倍数である。

(ii)　$n=k$ のとき　k^7-k が 7 の倍数と仮定すると，

$$(k+1)^7-(k+1)=k^7+\sum_{l=1}^{6}{}_7\mathrm{C}_l\,k^l+1-k-1=k^7-k+\sum_{l=1}^{6}{}_7\mathrm{C}_l\,k^l$$

すると，$l=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ のとき ${}_7\mathrm{C}_l$ は 7 の倍数より，$\displaystyle\sum_{l=1}^{6}{}_7\mathrm{C}_l\,k^l$ は 7 の倍数となり，k^7-k が 7 の倍数と合わせると，$(k+1)^7-(k+1)$ は 7 の倍数となる。

(i)(ii)より，すべての自然数 n に対して，n^7-n は 7 の倍数である。

［解　説］

二項定理についての基本題です。(1)は(2)との関連を考えると，解答例のように具体的に求めるということでしょう。

3　問題のページへ

(1)　$C: y=a(x-1)^2+1\ (a>0)$ に対して，$\mathrm{P}(s,\ a(s-1)^2+1)$ における接線 l の方程式は，$y'=2a(x-1)$ から，$y-\{a(s-1)^2+1\}=2a(s-1)(x-s)$ となり，

$$y=2a(s-1)x-as^2+a+1\cdots\cdots\cdots(*)$$

条件より，$(*)$が $y=Ax+B$ に一致するので，

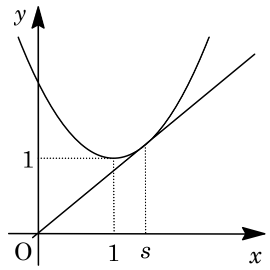
$$A=2a(s-1),\quad B=-as^2+a+1$$

(2)　条件より，$A=2a(s-1)>0$ から $s>1$ となり，また $B=-as^2+a+1=0$ より，

$$s^2=\frac{a+1}{a},\quad s=\sqrt{\frac{a+1}{a}}$$

すると，$A=2a\Big(\sqrt{\dfrac{a+1}{a}}-1\Big)=2\big(\sqrt{a(a+1)}-a\big)$ から，

$$l: y=2\big(\sqrt{a(a+1)}-a\big)x$$



(3)　l と C および y 軸で囲まれた図形の面積 $S(a)$ は，

$$S(a)=\int_0^s\{a(x-1)^2+1-2a(s-1)x\}dx$$
$$=\int_0^s(ax^2-2asx+a+1)dx$$
$$=\Big[\frac{a}{3}x^3-asx^2+(a+1)x\Big]_0^s=\frac{a}{3}s^3-as^3+(a+1)s$$
$$=\Big(-\frac{2}{3}a\cdot\frac{a+1}{a}+a+1\Big)\sqrt{\frac{a+1}{a}}=\frac{1}{3}(a+1)\sqrt{\frac{a+1}{a}}$$

(4)　$\dfrac{S(a)}{\sqrt[4]{a}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a+1}{\sqrt[4]{a}}\sqrt{\dfrac{a+1}{a}}=\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{\dfrac{(a+1)^6}{a^3}}$ となり，

$$\frac{(a+1)^6}{a^3}=\Big(\frac{a+1}{\sqrt{a}}\Big)^6=\Big(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\Big)^6\geqq\Big(2\sqrt{\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}}\Big)^6=2^6$$

ここで，等号は $\sqrt{a}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$，すなわち $a=1$ のときに成立する。

したがって，$\dfrac{S(a)}{\sqrt[4]{a}}$ は $a=1$ のとき最小値 $\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{2^6}=\dfrac{1}{3}\cdot2^{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$ をとる。

［解　説］

微積分の総合問題です。(3)で被積分関数が $a(x-s)^2$ となることに気付けば，計算が少し簡単になります。また，(4)では求めた式を 4 乗根の中に入れてしまうと，相加平均と相乗平均の出番になります。