

1

解答解説のページへ

$\triangle ABC$ の外心を O 、重心を G とし、 $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) $\angle A = \frac{\pi}{2}$ ならば、 $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ が成り立つことを証明せよ。
- (2) $\angle A \neq \frac{\pi}{2}$ ならば、 $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ であることを証明せよ。
- (3) $\overrightarrow{OA} = (\cos \theta, \sin \theta)$ 、 $\overrightarrow{OB} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 、 $\overrightarrow{OC} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ とする。ただし、 $0 \leq \theta < 2\pi$ である。このとき、 $|\overrightarrow{GH}|^2$ の最大値、最小値を求めよ。

2

解答解説のページへ

a, b を 1 と異なる正の数とする。次の問いに答えよ。

- (1) $\log_2 \sqrt{a} - \log_a 2 = \frac{1}{2}$ を満たす a を求めよ。
- (2) $\log_2 \sqrt{a} - \log_a 2 \geq \frac{1}{2}$ を満たす a の範囲を求めよ。
- (3) $a > 1$ かつ $b > 1$ とする。 $\log_b \sqrt{a} - \log_a b \geq \frac{1}{2}$ を満たすとき、 a と b^2 の大小関係を調べよ。
- (4) $a + b \leq 8$ かつ $\log_b \sqrt{a} - \log_a b \geq \frac{1}{2}$ を満たす自然数の組 (a, b) をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

関数 $f(x)$ は等式 $f(x) = |x-1| + \int_0^2 xf(t)dt$ を満たすとし、 $\int_0^2 f(t)dt = a$ とお

く。次の問いに答えよ。

- (1) $f(2)$ を a を用いて表せ。
- (2) a の値を求めよ。
- (3) k は定数とする。 $y = xf(x) - k$ のグラフと $y = ax^2$ のグラフの共有点の個数を求めよ。

1

問題のページへ

(1) $\triangle ABC$ の外心 O に対して、 $\angle A = \frac{\pi}{2}$ のとき、 O は辺 BC の中点に一致する。

よって、 $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ である。

(2) $\triangle ABC$ が $\angle A \neq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \cdots \cdots (*)$ より $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ と

なり、(1) から $\overrightarrow{AH} \neq \vec{0}$ である。

このとき、 $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}|$ に注意すると、

$$\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = |\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{OB}|^2 = 0$$

よって、 $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ である。

(3) $\triangle ABC$ の重心を G とすると、 $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ となり、(*) から、

$$\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

すると、 $\overrightarrow{OA} = (\cos \theta, \sin \theta)$ 、 $\overrightarrow{OB} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ 、 $\overrightarrow{OC} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ から、

$$\overrightarrow{GH} = \frac{2}{3} \left(\cos \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \theta - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{2}{3} (\cos \theta, \sin \theta - \sqrt{2})$$

$$|\overrightarrow{GH}|^2 = \frac{4}{9} \{ \cos^2 \theta + (\sin \theta - \sqrt{2})^2 \} = \frac{4}{9} (3 - 2\sqrt{2} \sin \theta)$$

したがって、 $0 \leq \theta < 2\pi$ より、 $|\overrightarrow{GH}|^2$ は、 $\sin \theta = -1$ のとき最大値 $\frac{4}{9}(3 + 2\sqrt{2})$ 、 $\sin \theta = 1$ のとき最小値 $\frac{4}{9}(3 - 2\sqrt{2})$ をとる。

[解 説]

平面ベクトルと図形についての基本的な問題です。

2

問題のページへ

(1) $a > 0$ かつ $a \neq 1$ のとき, $\log_2 \sqrt{a} - \log_a 2 = \frac{1}{2}$ より $\frac{1}{2} \log_2 a - \frac{1}{\log_2 a} = \frac{1}{2}$ となり,

$$(\log_2 a)^2 - 2 = \log_2 a, (\log_2 a - 2)(\log_2 a + 1) = 0$$

よって, $\log_2 a = 2, -1$ から, $a = 4, \frac{1}{2}$ である。

(2) (1)と同様に, $\log_2 \sqrt{a} - \log_a 2 \geq \frac{1}{2}$ より $\frac{1}{2} \log_2 a - \frac{1}{\log_2 a} \geq \frac{1}{2}$ となり,

$$(\log_2 a)^3 - 2 \log_2 a \geq (\log_2 a)^2, (\log_2 a)(\log_2 a - 2)(\log_2 a + 1) \geq 0$$

ここで, $\log_2 a \neq 0$ に注意すると, $-1 \leq \log_2 a < 0, 2 \leq \log_2 a$ となり, すなわち

$$\frac{1}{2} \leq a < 1, 4 \leq a \text{ である。}$$

(3) まず, $a > 1$ かつ $b > 1$ のとき, $\log_b a > 0$ である。

$\log_b \sqrt{a} - \log_a b \geq \frac{1}{2}$ より, $\frac{1}{2} \log_b a - \frac{1}{\log_b a} \geq \frac{1}{2}$ となり, $\log_b a > 0$ から,

$$(\log_b a)^2 - 2 \geq \log_b a, (\log_b a - 2)(\log_b a + 1) \geq 0$$

$\log_b a + 1 > 0$ なので, $\log_b a \geq 2$ すなわち $a \geq b^2$ である。

(4) a, b は自然数より $a > 1$ かつ $b > 1$ となり, (3)の結果を利用すると, 条件は,

$$a + b \leq 8 \cdots \cdots \textcircled{1}, a \geq b^2 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

(i) $b = 2$ のとき ①から $a \leq 6$, ②より $a \geq 4$ となり, $a = 4, 5, 6$

(ii) $b \geq 3$ のとき ②から $a \geq 9$ となり, ①を満たす a は存在しない。

(i)(ii)より, $(a, b) = (4, 2), (5, 2), (6, 2)$

[解説]

対数方程式, 対数不等式についての問題です。(2)では分数不等式が現れるので, 場合分けをする代わりに, 両辺に分母の 2 乗をかけた後に因数分解という流れで処理をしています。なお, (3)では分母はプラスなので, この処理は必要ありません。

3

問題のページへ

$$(1) \text{ 条件より, } f(x) = |x-1| + \int_0^2 xf(t)dt = |x-1| + x \int_0^2 f(t)dt$$

ここで, $\int_0^2 f(t)dt = a \cdots \cdots \textcircled{1}$ とおくと, $f(x) = |x-1| + ax \cdots \cdots \textcircled{2}$ となり,

$$f(2) = |2-1| + 2a = 1 + 2a$$

$$(2) \textcircled{2} \text{より, } f(x) = x-1 + ax = (a+1)x-1 \quad (x \geq 1)$$

$$f(x) = -x+1 + ax = (a-1)x+1 \quad (x < 1)$$

①に代入すると,

$$\begin{aligned} a &= \int_0^2 f(t)dt = \int_0^1 \{(a-1)t+1\}dt + \int_1^2 \{(a+1)t-1\}dt \\ &= \left[\frac{1}{2}(a-1)t^2 + t \right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}(a+1)t^2 - t \right]_1^2 = \frac{1}{2}(a-1) + 1 + \frac{1}{2}(a+1) \cdot 3 - 1 \\ &= 2a + 1 \end{aligned}$$

よって, $a = -1$ となる。

$$(3) \textcircled{2} \text{より, } f(x) = -1 \quad (x \geq 1), \quad f(x) = -2x+1 \quad (x < 1)$$

ここで, $y = xf(x) - k \cdots \cdots \textcircled{3}$ と $y = -x^2 \cdots \cdots \textcircled{4}$ を連立すると,

$$xf(x) - k = -x^2, \quad xf(x) + x^2 = k$$

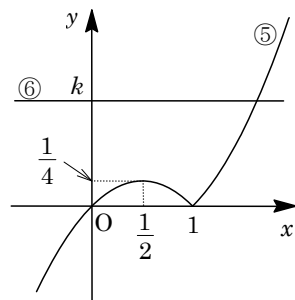
すると, $y = xf(x) + x^2 \cdots \cdots \textcircled{5}$ のグラフと $y = k \cdots \cdots \textcircled{6}$ のグラフの共有点の個数は, ③のグラフと④のグラフの共有点の個数に一致し, ⑤より,

(i) $x \geq 1$ のとき

$$xf(x) + x^2 = -x + x^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

(ii) $x < 1$ のとき

$$\begin{aligned} xf(x) + x^2 &= x(-2x+1) + x^2 = -x^2 + x \\ &= -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \end{aligned}$$



(i)(ii)より, ③と④のグラフの共有点の個数は, 右図より,

$$1 \text{ 個} \left(k < 0, \frac{1}{4} < k\right), \quad 2 \text{ 個} \left(k = 0, \frac{1}{4}\right), \quad 3 \text{ 個} \left(0 < k < \frac{1}{4}\right)$$

[解説]

置換え型の積分方程式と2次関数と方程式の融合問題です。誘導が詳しいので, 方針は明快です。