1　　解答解説のページへ

1 個のサイコロを 4 回続けて投げて出た目の数を順に $a,\ b,\ c,\ d$ とおき，2 直線 l_1，l_2 を $l_1 : y = ax + b$，$l_2 : y = cx + d$ と定める。次の問いに答えよ。

(1)　l_1 と l_2 が一致する確率を求めよ。

(2)　l_1 と l_2 が 1 点で交わる確率を求めよ。

(3)　l_1 と l_2 が 1 点で交わり，その交点の x 座標, y 座標がともに整数となる確率を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

$a,\ k$ を定数とし，曲線 $C_1 : y = e^x$ および曲線 $C_2 : y = k\sqrt{x-a}$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　2 つの曲線 C_1，C_2 が共有点をもつための，a, k が満たすべき条件を求めよ。

以下，2 つの曲線 C_1，C_2 が共有点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ において同一の直線 l に接しているとする。

(2)　a と k を t を用いて表せ。

(3)　直線 l が原点を通るとする。このとき，曲線 C_1，曲線 C_2，x 軸，y 軸で囲まれる図形を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

3

解答解説のページへ

$a,\ b,\ c$ を正の数とする。楕円 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ が，4 点 $(c,\ 0)$，$(0,\ c)$，$(-c,\ 0)$，$(0,\ -c)$ を頂点とする正方形の各辺に接しているとする。4 つの接点を頂点とする四角形の面積を S，楕円 C で囲まれる図形の面積を T とする。このとき，不等式 $\dfrac{S}{T}\leqq\dfrac{2}{\pi}$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか答えよ。

4

解答解説のページへ

座標空間において，原点$(0,\ 0,\ 0)$と点$(1,\ 1,\ -3)$を通る直線を l，2 つの点$(-6,\ 6,\ 0)$，$(1,\ 2,\ 1)$を通る直線を m とする。直線 l 上の点 P と直線 m 上の点 Q を，直線 PQ が直線 l, m のいずれにも直交するようにとる。次の問いに答えよ。

(1) $\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|$を求めよ。

(2) A を直線 l 上の点，B を直線 m 上の点とする。ただし，$\mathrm{A} \neq \mathrm{P}$ とする。このとき，$\angle\mathrm{APB} = \dfrac{\pi}{2}$ であることを示せ。

(3) 直線 l 上の 2 点 A，C をそれらの中点が P となるようにとる。同様に，直線 m 上の 2 点 B，D をそれらの中点が Q となるようにとる。$\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right| = a$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{QB}}\right| = b$ のとき，三角形 BDP の面積と四面体 ABCD の体積を求めよ。

1

問題のページへ

(1) サイコロを 4 回投げ，出た目の数を順に a，b，c，d とおき，2 直線 $l_1 : y = ax + b$，$l_2 : y = cx + d$ を対応させる。

このとき，l_1 と l_2 が一致するのは，$a = c$ かつ $b = d$ の場合より，その確率は,

$$\frac{6\times6\times1\times1}{6^4} = \frac{1}{36}$$

(2) l_1 と l_2 が平行または一致のときは $a = c$ より，その確率は $\dfrac{6\times6\times1\times6}{6^4} = \dfrac{1}{6}$ となるので，l_1 と l_2 が 1 点で交わる確率は，$1 - \dfrac{1}{6} = \dfrac{5}{6}$ である。

(3) $a \neq c$ のとき，l_1 と l_2 が 1 点で交わり，その交点は $ax + b = cx + d$ から,

$$(a-c)x = -b + d,\ x = -\frac{b-d}{a-c}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

そして，交点の x 座標が整数であるとき，$y = ax + b$ から y 座標も整数となるので，以下，$(*)$が整数となる条件を求める。

さて，一般的に 2 つの数 p，q とその差 $p - q$ をまとめると右表のようになり，これを参照して,

p \ q	1	2	3	4	5	6
1	0	-1	-2	-3	-4	-5
2	1	0	-1	-2	-3	-4
3	2	1	0	-1	-2	-3
4	3	2	1	0	-1	-2
5	4	3	2	1	0	-1
6	5	4	3	2	1	0

(i) $a - c = \pm1$ のとき

$(a,\ c)$ は 10 通り，$(b,\ d)$ は任意で 36 通りある。

(ii) $a - c = \pm2$ のとき

$(a,\ c)$ は 8 通り，$(b,\ d)$ は $b - d = 0,\ \pm2,\ \pm4$ より，$6 + 8 + 4 = 18$ 通りある。

(iii) $a - c = \pm3$ のとき

$(a,\ c)$ は 6 通り，$(b,\ d)$ は $b - d = 0,\ \pm3$ より，$6 + 6 = 12$ 通りある。

(iv) $a - c = \pm4$ のとき

$(a,\ c)$ は 4 通り，$(b,\ d)$ は $b - d = 0,\ \pm4$ より，$6 + 4 = 10$ 通りある。

(v) $a - c = \pm5$ のとき

$(a,\ c)$ は 2 通り，$(b,\ d)$ は $b - d = 0,\ \pm5$ より，$6 + 2 = 8$ 通りある。

(i)〜(v)より，l_1 と l_2 の交点の x 座標，y 座標がともに整数となる確率は,

$$\frac{10\times36 + 8\times18 + 6\times12 + 4\times10 + 2\times8}{6^4} = \frac{632}{6^4} = \frac{79}{162}$$

［解 説］

確率の標準的な問題です。センターの解答例のように表を作って数え上げました。

2　問題のページへ

(1)　$C_1: y=e^x$ ……①，$C_2: y=k\sqrt{x-a}$ ……②に対して，①②を連立すると，

$$e^x=k\sqrt{x-a}\ \cdots\cdots③$$

③が $x\geqq a$ において解をもつ条件は，$x=a$ では不成立なので，$x>a$ として，

$$\frac{e^x}{\sqrt{x-a}}=k\ \cdots\cdots④$$

ここで，$f(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{x-a}}$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{2e^x(x-a)-e^x}{2(x-a)\sqrt{x-a}}=\dfrac{e^x(2x-2a-1)}{2(x-a)\sqrt{x-a}}$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになり，

x	a	$\cdots$	$a+\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

$$f\Big(a+\frac{1}{2}\Big)=\sqrt{2}e^{a+\frac{1}{2}}$$

$$\lim_{x\to a+0}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

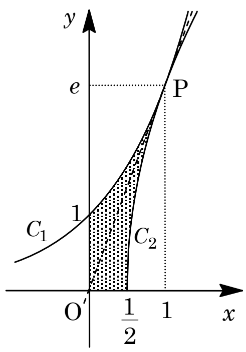
よって，④が解をもつ条件，すなわち曲線①と②が共有点をもつ条件は，$k\geqq\sqrt{2}e^{a+\frac{1}{2}}$ である。

(2)　C_1，C_2 が共有点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ で同一の直線 l に接しているとき，④はただ 1 つの解 $x=t$ をもつことに対応するので，

$$t=a+\frac{1}{2}\ \cdots\cdots⑤,\ k=\sqrt{2}e^{a+\frac{1}{2}}\ \cdots\cdots⑥$$

すると，⑤より $a=t-\dfrac{1}{2}$ となり，⑥から $k=\sqrt{2}e^t$ である。

(3)　直線 l が原点を通るとき，点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ における C_1 の接線の傾きは e^t なので，$\dfrac{e^t}{t}=e^t$ から $t=1$ となる。



すると，(2)から，$a=\dfrac{1}{2}$，$k=\sqrt{2}e$ となり，

$$C_2: y=\sqrt{2}e\sqrt{x-\frac{1}{2}}=e\sqrt{2x-1}\ \cdots\cdots⑦$$

このとき，C_1，C_2，x 軸，y 軸で囲まれる図形を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V とする。

①より $x=\log y$，⑦より $x=\dfrac{1}{2}\Big(1+\dfrac{y^2}{e^2}\Big)$ となり，

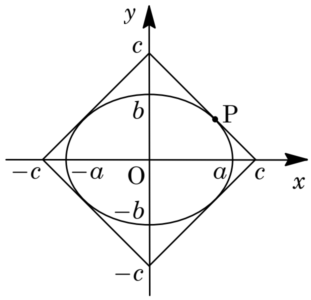
$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^e\frac{1}{4}\Big(1+\frac{y^2}{e^2}\Big)^2dy-\pi\int_1^e(\log y)^2dy\\&=\frac{\pi}{4}\int_0^e\Big(1+\frac{2y^2}{e^2}+\frac{y^4}{e^4}\Big)dy-\pi\Big(\big[\,y(\log y)^2\big]_1^e-\int_1^e2\log y\,dy\Big)\\&=\frac{\pi}{4}\Big[\,y+\frac{2y^3}{3e^2}+\frac{y^5}{5e^4}\Big]_0^e-\pi\big(e-2\big[\,y\log y-y\big]_1^e\big)\\&=\frac{\pi}{4}\Big(e+\frac{2}{3}e+\frac{1}{5}e\Big)-\pi\{e-2(e-e+1)\}=\Big(2-\frac{8}{15}e\Big)\pi\end{aligned}$$

［解 説］

微積分の総合問題です。(1)は定数分離をして処理しています。また, (3)の求積方法はいろいろありますが, とり立てて工夫もせずに, 普通に計算をしました。

3

問題のページへ



楕円 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と 4 点 $(c,\ 0)$，$(0,\ c)$，$(-c,\ 0)$，$(0,\ -c)$ を頂点とする正方形の第 1 象限の接点 P の座標を $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，接線の方程式は，

$$\frac{a\cos\theta}{a^2}x+\frac{b\sin\theta}{b^2}y=1,\quad \frac{\cos\theta}{a}x+\frac{\sin\theta}{b}y=1$$

この接線が，点 $(c,\ 0)$，$(0,\ c)$ を通るので，

$$\frac{c\cos\theta}{a}=1\cdots\cdots\cdots①,\quad \frac{c\sin\theta}{b}=1\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\cos\theta=\dfrac{a}{c}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{c}$ となり，$\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}\right)^2=1$，$a^2+b^2=c^2\cdots\cdots\cdots③$

このとき，第 1 象限の接点の座標は $\left(\dfrac{a^2}{c},\ \dfrac{b^2}{c}\right)$ となり，4 つの接点を結んでできる四角形は，対称性から長方形となるので，③を利用すると，その面積 S は，

$$S=4\cdot\frac{a^2}{c}\cdot\frac{b^2}{c}=\frac{4a^2b^2}{c^2}=\frac{4a^2b^2}{a^2+b^2}$$

また，楕円 C で囲まれる図形の面積 T は，

$$T=\pi a^2\cdot\frac{b}{a}=\pi ab$$

このとき，$\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{S}{T}=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4a^2b^2}{a^2+b^2}\cdot\dfrac{1}{\pi ab}=\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4ab}{\pi(a^2+b^2)}=\dfrac{2}{\pi}\left(1-\dfrac{2ab}{a^2+b^2}\right)\cdots\cdots\cdots④$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，

$$a^2+b^2\geqq 2\sqrt{a^2b^2}=2ab,\quad \frac{2ab}{a^2+b^2}\leqq 1\ \ (\text{等号は}\,a=b\,\text{のとき成立})\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{S}{T}\geqq 0$，すなわち $\dfrac{S}{T}\leqq\dfrac{2}{\pi}$ が成り立つ。

また，等号成立は，③も合わせると，$a=b=\dfrac{c}{\sqrt{2}}$ のときである。

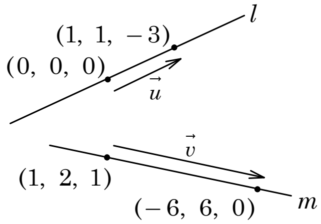
［解　説］

楕円を題材とした基本的な問題です。式変形を進めると，相加平均と相乗平均の関係を利用することが推測できます。もっとも，c と θ で処理する手もありますが。

4

問題のページへ

(1)　直線 l の方向ベクトル $\vec{u}=(1,\ 1,\ -3)$，直線 m の方向ベクトル $\vec{v}=(-6-1,\ 6-2,\ -1)=(-7,\ 4,\ -1)$ とすると，$t,\ s$ を実数として，



$$l:(x,\ y,\ z)=t(1,\ 1,\ -3)$$
$$m:(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 1)+s(-7,\ 4,\ -1)$$

条件より，点 P は直線 l 上に，点 Q は直線 m 上にあるので，$\mathrm{P}(t,\ t,\ -3t)$，$\mathrm{Q}(1-7s,\ 2+4s,\ 1-s)$ と表せ，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(1-7s-t,\ 2+4s-t,\ 1-s+3t)$$

すると，直線 PQ が直線 $l,\ m$ のいずれにも直交することより，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{u}=(1-7s-t)+(2+4s-t)-3(1-s+3t)=-11t=0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{v}=-7(1-7s-t)+4(2+4s-t)-(1-s+3t)=66s=0$$

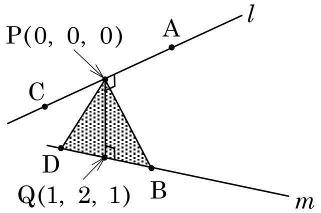
よって，$t=s=0$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(1,\ 2,\ 1)$ から $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$ である。

(2)　点 A は直線 l 上，点 B は直線 m 上にあるので，$a\,(a\neq 0)$，b を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=a\vec{u}$，$\overrightarrow{\mathrm{QB}}=b\vec{v}$ とおくと，(1)から，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QB}})=a\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+a\vec{u}\cdot b\vec{v}=ab\vec{u}\cdot\vec{v}=ab(-7+4+3)=0$$

よって，$\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{2}$ となる。

(3)　直線 l 上の 2 点 A，C の中点が P，直線 m 上の 2 点 B，D の中点が Q で，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=a$，$|\overrightarrow{\mathrm{QB}}|=b$ より，△BDP の面積 S は，(1)より，



$$S=\frac{1}{2}\mathrm{BD}\cdot\mathrm{PQ}=\frac{1}{2}\cdot 2b\cdot\sqrt{6}=\sqrt{6}b$$

また，(2)より，$\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\angle\mathrm{APD}=\dfrac{\pi}{2}$ となるので，直線 l は△BDP を含む平面に垂直になり，四面体 ABCD の体積 V は，

$$V=\frac{1}{3}S\cdot\mathrm{PA}+\frac{1}{3}S\cdot\mathrm{PB}=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{6}b\cdot 2a=\frac{2}{3}\sqrt{6}\,ab$$

［解　説］

空間図形に関する標準的な問題です。誘導が丁寧で，しかも数値に配慮があるため，計算量はそれほどでもありません。