1

解答解説のページへ

k を正の定数とする。2 次方程式 $z^2-2kz+1=0$ が虚数解をもつとし，虚部が正の虚数解を α とする。次の問いに答えよ。

(1) k の値の範囲を求めよ。また，$|\alpha|$ を求めよ。

(2) $\cos\dfrac{5}{12}\pi$ の値を求めよ。

(3) 複素数平面において，α^3 が第 3 象限にあり，かつ α^6 が第 1 象限にあるときの α の偏角 θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ と k の値の範囲を求めよ。ただし，座標軸の点は，どの象限にも属さない。

(4) (3)において求めた範囲に α があるとき，$|1-\alpha^5|$ の値の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

座標平面に 2 曲線 $C_1 : y = \sqrt{x} - 4 \ (x > 0)$ と $C_2 : y = -\sqrt{1-x} \ (x < 1)$ がある。次の問いに答えよ。

(1) C_1 は区間 $x > 0$ で上に凸であることを示せ。

(2) 点 $\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{2},\ -2\right)$ に関して，点 P と対称な点を Q とする。点 P が C_1 上を動くとき，点 Q の軌跡が C_2 であることを示せ。

(3) C_1 上の点 A における法線 l が点 F を通るとし，l と C_2 の共有点を B とする。このとき，A の座標 $(x_1,\ y_1)$ および B の座標 $(x_2,\ y_2)$ をそれぞれ求めよ。

(4) C_1 上に点 X_1，C_2 上に点 X_2 をとる。線分 $\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2$ の長さの最小値を求めよ。

3

解答解説のページへ

座標平面において，

$$x=\sin t\,,\ \ y=\cos t-\sin t\ \ \ (0\leqq t\leqq 2\pi)$$

で表される曲線を C_1 とし，x 軸に関して C_1 と対称な曲線を C_2 とする。C_1 で囲まれる図形と C_2 で囲まれる図形の共通部分の面積 S を求めよ。

4

解答解説のページへ

p を 2 より大きい素数, n を正の整数とする。$1 \leqq k \leqq p^n$ を満たす整数 k で, p と互いに素であるもの全体の集合を A とする。次の問いに答えよ。

(1)　$p=3$，$n=2$ のとき, 集合 A を求めよ。

(2)　A に属する整数の個数, および A に属するすべての整数の和を求めよ。

(3)　A に属する整数 k に対して，$kl-1$ が p^n の倍数となるような A に属する整数 l が存在し, それはただ 1 つであることを示せ。ただし, 整数 a と b が互いに素であるとき, 1 次不定方程式 $ax+by=1$ は, 整数解をもつことが知られている。必要ならばこの事実を利用してよい。

(4)　A に属するすべての整数 k についての $\dfrac{1}{k}$ の和を既約分数で表したとき, 分子は p^n の倍数となることを示せ。

1

問題のページへ

(1) 2 次方程式 $z^2-2kz+1=0\ (k>0)$ ……①が，虚数解 α，$\overline{\alpha}$ をもつことより，

$$D/4=k^2-1=(k+1)(k-1)<0$$

すると，$k>0$ から，$0<k<1$ である。

また，解と係数の関係から $\alpha\overline{\alpha}=1$ すなわち $|\alpha|^2=1$ となり，$|\alpha|=1$ である。

(2) $\cos\dfrac{5}{12}\pi=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6}-\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(3) $\arg\alpha=\theta\ (0\leqq\theta<2\pi)$ とすると，(1)より，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$ となる。

まず，α の虚部は正から $0<\theta<\pi$ ……②となる。

また，$\arg\alpha^3=3\theta$ から②より $0<3\theta<3\pi$ となり，α^3 が第 3 象限にあるので，

$$\pi<3\theta<\frac{3}{2}\pi,\ \frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2}\ \cdots\cdots\cdots③$$

さらに，$\arg\alpha^6=6\theta$ から③より $2\pi<6\theta<3\pi$ となり，α^6 が第 1 象限にあるので，

$$2\pi<6\theta<\frac{5}{2}\pi,\ \frac{\pi}{3}<\theta<\frac{5}{12}\pi\ \cdots\cdots\cdots④$$

次に，解と係数の関係から $\alpha+\overline{\alpha}=2k$ すなわち $k=\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}$ となり，k は α の実部である。よって，$k=\cos\theta$ なので，④と(2)の結果から，

$$\cos\frac{5}{12}\pi<k<\cos\frac{\pi}{3},\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}<k<\frac{1}{2}$$

(4) $1-\alpha^5=1-(\cos5\theta+i\sin5\theta)=(1-\cos5\theta)-i\sin5\theta$ なので，

$$|1-\alpha^5|^2=(1-\cos5\theta)^2+(-\sin5\theta)^2=2-2\cos5\theta=2(1-\cos5\theta)$$

ここで，④より $\dfrac{5}{3}\pi<5\theta<\dfrac{25}{12}\pi$ となり，$\cos\dfrac{5}{3}\pi=\cos\dfrac{\pi}{3}<\cos\dfrac{\pi}{12}=\cos\dfrac{25}{12}\pi$ より，

$$\cos\frac{5}{3}\pi<\cos5\theta\leqq\cos2\pi,\ \frac{1}{2}<\cos5\theta\leqq1$$

すると，$0\leqq|1-\alpha^5|^2<1$ となるので，$0\leqq|1-\alpha^5|<1$ である。

［解 説］

ド・モアブルの定理が絡んだ複素数と方程式についての問題です。設問は多いですが，誘導がていねいなため，計算が止まることはないでしょう。

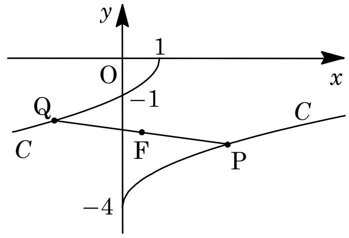
2　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　問題のページへ

(1)　$C_1 : y = \sqrt{x} - 4 = x^{\frac{1}{2}} - 4\ (x > 0)$ ……①に対して,

$$y' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},\quad y'' = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$$

すると，$x > 0$ で $y'' < 0$ より，C_1 は区間 $x > 0$ で上に凸である。

(2)　C_1 上を動く点 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{t} - 4)\ (t > 0)$ に対し，点 $\mathrm{F}\left(\frac{1}{2},\ -2\right)$ に関して対称な点を $\mathrm{Q}(u,\ v)$ とおくと,



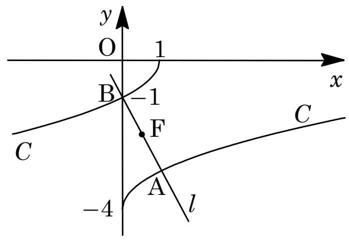
$$u = 2\cdot\frac{1}{2} - t = 1 - t$$

$$v = 2\cdot(-2) - (\sqrt{t} - 4) = -\sqrt{t}$$

これより, t を消去すると $v = -\sqrt{1-u}$ となり，$t > 0$ から $u < 1$ となる。

すなわち，$\mathrm{Q}(u,\ v)$ の軌跡は，$C_2 : y = -\sqrt{1-x}\ (x < 1)$ ……②である。

(3)　C_1 上の点 $\mathrm{A}(x_1,\ \sqrt{x_1} - 4)$ での接線の傾きは $\dfrac{1}{2\sqrt{x_1}}$ より，法線 l は傾きが $-2\sqrt{x_1}$ となり，その方程式は,



$$y - (\sqrt{x_1} - 4) = -2\sqrt{x_1}\,(x - x_1)$$

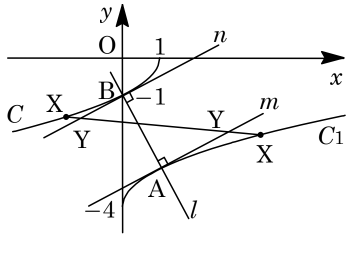
点 $\mathrm{F}\left(\frac{1}{2},\ -2\right)$ を通ることより,

$$-2 - \sqrt{x_1} + 4 = -2\sqrt{x_1}\left(\frac{1}{2} - x_1\right)$$

すると，$-\sqrt{x_1} + 2 = -\sqrt{x_1} + 2x_1\sqrt{x_1}$ から $x_1\sqrt{x_1} = 1$ となり，${x_1}^3 = 1$ である。

これより，$x_1 = 1$ となり $\mathrm{A}(1,\ -3)$ である。また，C_2 と l の共有点 B は, (2)より $\mathrm{F}\left(\frac{1}{2},\ -2\right)$ に関して A と点対称なので，$\mathrm{B}(0,\ -1)$ である。

(4)　(1)より C_1 は上に凸なので，C_1 を F に関して点対称移動した C_2 は下に凸である。



ここで, A における C_1 の接線を m, B における C_2 の接線を n とおくと, n は m を F に関して点対称移動したものなので $m /\!/ n$ となる。そして, A を除く C_1 上の点は m の下側, B を除く C_2 上の点は n の上側に位置する。

さて，C_1 上に点 X_1，C_2 上に点 X_2 をとり，線分 $\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2$ と m, n の交点をそれぞれ Y_1，Y_2 とおくと，$\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2 \geqq \mathrm{Y}_1\mathrm{Y}_2 \geqq \mathrm{AB}$ である。

したがって，線分 $\mathrm{X}_1\mathrm{X}_2$ の長さの最小値は,

$$\mathrm{AB} = \sqrt{(0-1)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{5}$$

［解 説］

点対称な 2 つの曲線間の距離を題材にした微分の応用問題です。(4)がメインですが，それまでの設問が誘導になっています。類題が気になったので調べたところ，線対称の場合ですが，1999 年の東大・文で出題されていました。

3

問題のページへ

曲線 C_1： $x=\sin t$， $y=\cos t-\sin t$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$ に対して，対称性を調べるために，まず，$x=f(t)$，$y=g(t)$ とおくと，

$$f(t+\pi)=-f(t),\ g(t+\pi)=-g(t)$$

これより，C_1 の $0\leqq t\leqq \pi$ の部分と $\pi\leqq t\leqq 2\pi$ の部分は原点対称になり，$0\leqq t\leqq \pi$ において，

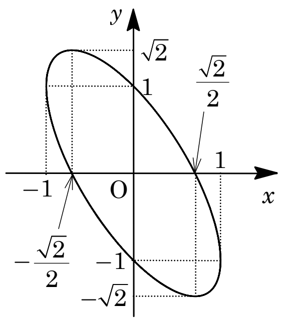
$$f'(t)=\cos t$$
$$g'(t)=-\sin t-\cos t$$
$$=-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(t)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	0
$g'(t)$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	1	$\searrow$	-1	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	-1

すると，x，y の増減は右上表のようになり，C_1 と x 軸との交点について，$g(t)=0$ から，

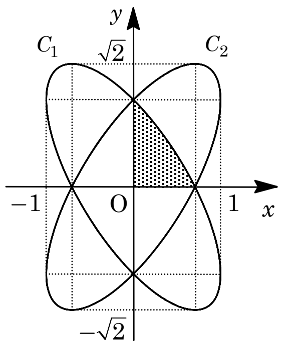
$$\cos t-\sin t=0,\ t=\frac{\pi}{4}$$

このとき，$(x,\ y)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$ である。



そこで，$0\leqq t\leqq \pi$ の部分を原点対称移動して $\pi\leqq t\leqq 2\pi$ の部分も合わせて描くと，C_1 の概形は右図のようになる。

さらに，x 軸に関して C_1 と対称な曲線 C_2 も合わせて描くと，右下図のようになる。そして，C_1 と C_2 で囲まれる図形の共通部分の面積 S は，対称性より，図の網点部の面積の 4 倍になるので，



$$\frac{S}{4}=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} y\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos t-\sin t)\cos t\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t-\sin 2t)\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=\frac{\pi}{8}$$

よって，$S=4\cdot\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$ である。

［解　説］

パラメータ曲線に囲まれた部分の面積を求める頻出題です。対称性に注意すると，計算量は穏やかです。

4

問題のページへ

(1) p を 2 より大きい素数, n を正の整数とするとき，$1 \leqq k \leqq p^n$ を満たす整数 k で, p と互いに素であるもの全体の集合を A とする。

$p=3$，$n=2$ のとき，$1 \leqq k \leqq 3^2$ で 3 と互いに素でない整数 k は 3, 6, 9 なので,

$$A=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8\}$$

(2) $1 \leqq k \leqq p^n$ を満たす整数 k で, p と互いに素でない整数 k は,

$$k=p,\ 2p,\ \cdots,\ p^{n-1}\cdot p$$

すると, A に属する整数の個数 N は，$N=p^n-p^{n-1}$ である。

また, A に属するすべての整数の和 S は,

$$S=(1+2+\cdots+p^n)-(p+2p+\cdots+p^{n-1}\cdot p)$$
$$=\frac{1}{2}p^n(p^n+1)-\frac{1}{2}p^{n-1}(p^{n-1}+1)\cdot p=\frac{1}{2}p^n(p^n-p^{n-1})=\frac{1}{2}(p-1)p^{2n-1}$$

(3) A に属する整数 k と 2 より大きい素数 p は互いに素なので, k と p^n も互いに素になり，1 次不定方程式 $kx+p^ny=1$ ……①は整数解をもつ。

さて, x を p^n で割った商を q，余りを l とおくと,

$$x=p^nq+l\quad(0\leqq l\leqq p^n-1)$$

ここで，$l=0$ とすると，①は $kp^nq+p^ny=1$ すなわち $p^n(kq+y)=1$ となり成立しない。これより $l\neq 0$ となり，$1\leqq l\leqq p^n-1\leqq p^n$ のもとで，①は,

$$k(p^nq+l)+p^ny=1,\ kl+p^n(kq+y)=1$$

さらに，$z=-kq-y$ とおくと, z は整数で,

$$kl-p^nz=1,\ kl-1=p^nz\quad(1\leqq l\leqq p^n)\ \cdots\cdots\cdots②$$

次に, l は p と互いに素でない，すなわち $l=mp$ (m は整数)と仮定すると，②から,

$$kmp-p^nz=1,\ p(km-p^{n-1}z)=1\ \cdots\cdots\cdots③$$

すると，③は成立しないことより, l は p と互いに素である。

したがって，②と合わせると，$kl-1$ が p^n の倍数となるような $l\in A$ が存在する。

また，$l'\in A$，z' を整数として，$kl'-1=p^nz'$ として，②と連立すると,

$$k(l-l')=p^n(z-z')$$

ここで, k と p^n は互いに素なので，$l-l'$ は p^n の倍数となる。

そして，$1\leqq l\leqq p^n$，$1\leqq l'\leqq p^n$ なので，$-(p^n-1)\leqq l-l'\leqq p^n-1$ となり，これより $l-l'=0$ すなわち $l=l'$ である。

以上より, 整数 $l\in A$ はただ 1 つ存在する。

(4) $A=\{k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_N\}$ として，②から，次式のように設定する。

$$k_1l_1-1=p^nz_1,\ k_2l_2-1=p^nz_2,\ \cdots\cdots,\ k_Nl_N-1=p^nz_N$$

このとき, (3)の結果から，$A=\{l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_N\}$ となり,

$$\frac{1}{k_1}=l_1-p^n\cdot\frac{z_1}{k_1},\ \frac{1}{k_2}=l_2-p^n\cdot\frac{z_2}{k_2},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{k_N}=l_N-p^n\cdot\frac{z_N}{k_N}$$

ここで，$T=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}+\cdots+\frac{1}{k_N}$ とおくと，

$$\begin{aligned}T&=(l_1+l_2+\cdots+l_N)-p^n\left(\frac{z_1}{k_1}+\frac{z_2}{k_2}+\cdots+\frac{z_N}{k_N}\right)\\&=(k_1+k_2+\cdots+k_N)-p^n\left(\frac{z_1}{k_1}+\frac{z_2}{k_2}+\cdots+\frac{z_N}{k_N}\right)\\&=\frac{1}{2}(p-1)p^{2n-1}-p^n\left(\frac{z_1}{k_1}+\frac{z_2}{k_2}+\cdots+\frac{z_N}{k_N}\right)\cdots\cdots\cdots④\end{aligned}$$

ここで，$\frac{1}{2}(p-1)=a$ とおくと，p は奇数より a は整数となる。

また，$\frac{z_1}{k_1}+\frac{z_2}{k_2}+\cdots+\frac{z_N}{k_N}=\frac{c}{b}$ $\left(ただし\ \frac{c}{b}\ は既約分数\right)$ とおくと，分母 b は p と互いに素であり，④から，

$$T=ap^{2n-1}-p^n\cdot\frac{c}{b}=\frac{abp^{2n-1}-cp^n}{b}=\frac{p^n(abp^{n-1}-c)}{b}$$

よって，T を既約分数で表したとき，分子は p^n の倍数となる。

［解　説］

整数を題材にした論証問題です。後半は考えにくい設問ですが，(3)では集合 A の $1\leqq l\leqq p^n$ の条件から，一つずつ処理をしています。また，(4)では，(1)で求めた 1 つの例をもとに逆数の和を考え，一般化して記述しました。