

1

[解答例のページへ](#)

$AB = 6$, $BC = \sqrt{6}$, $CA = 3\sqrt{2}$ である $\triangle ABC$ において, $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ とおく。
次の問いに答えよ。

- (1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ を求めよ。
- (2) $|2\vec{a} + \vec{b}|$ の値を求めよ。
- (3) 点 A を通り直線 BC と直交する直線を m , 点 B を通り直線 AC と直交する直線を n とする。 m と n の交点を P としたとき, $\overrightarrow{CP}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

2[解答例のページへ](#)

3 個のさいころを同時に投げ、それらの出た目の積を X とし、 X を素因数分解したときの 3 の指数を Y とする。ただし、 X が 3 で割り切れない場合は $Y = 0$ とする。たとえば、 $X = 45 = 3^2 \cdot 5$ のときは $Y = 2$ であり、 $X = 50 = 2 \cdot 5^2$ のときは $Y = 0$ である。

次の問いに答えよ。

- (1) $X = 216$ となる確率を求めよ。
- (2) $X = 36$ となる確率を求めよ。
- (3) $Y \geq 1$ となる確率を求めよ。
- (4) Y の期待値を求めよ。

3[解答例のページへ](#)

高さ h の四角柱から高さ h の円柱をくり抜いた立体図形 G を考える。ただし、四角柱の底面は 1 辺の長さが $3r$ の正方形で、円柱の底面はその正方形の内部に含まれる半径 r の円とする。このとき、 G の表面積 S と体積 V は、くり抜く円柱の位置によらない。次の問いに答えよ。

- (1) 表面積 S を、 r と h を用いて表せ。
- (2) 体積 V を、 r と S を用いて表せ。
- (3) $S = 6$ とする。 r が変化するとき、体積 V の最大値とそのときの r の値を求めよ。

1

問題のページへ

- (1) $AB = 6$, $BC = \sqrt{6}$, $CA = 3\sqrt{2}$ である $\triangle ABC$ に余弦定理を適用し, $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ とおくと,

$$6^2 = (3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{6})^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

これより, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(18 + 6 - 36) = -6$ となる。

- (2) $|\vec{a}| = 3\sqrt{2}$, $|\vec{b}| = \sqrt{6}$ より,

$$|2\vec{a} + \vec{b}|^2 = 4 \cdot (3\sqrt{2})^2 + 4 \cdot (-6) + (\sqrt{6})^2 = 54$$

すると, $|2\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$ である。

- (3) 点 A を通り直線 BC と直交する直線 m と点 B を通り直線 AC と直交する直線 n の交点 P に対して, $\overrightarrow{CP} = s\vec{a} + t\vec{b}$ とおく。

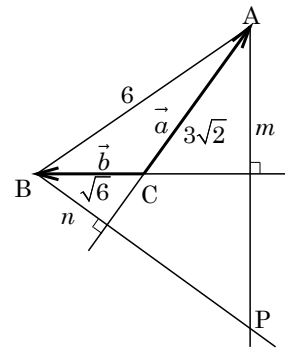
まず, $\overrightarrow{AP} = (s-1)\vec{a} + t\vec{b}$ と $\vec{b}$ は垂直になることより, $\overrightarrow{AP} \cdot \vec{b} = 0$ から,

$$(s-1) \cdot (-6) + t \cdot (\sqrt{6})^2 = 0, \quad -s + t = -1 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また, $\overrightarrow{BP} = s\vec{a} + (t-1)\vec{b}$ と $\vec{a}$ は垂直になることより, $\overrightarrow{BP} \cdot \vec{a} = 0$ から,

$$s \cdot (3\sqrt{2})^2 + (t-1) \cdot (-6) = 0, \quad 3s - t = -1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①②より, $s = -1$, $t = -2$ となるので, $\overrightarrow{CP} = -\vec{a} - 2\vec{b}$ である。



[コメント]

平面ベクトルの図形への応用題です。内容は基礎事項の確認です。

2

問題のページへ

3 個のさいころの出た目の積を X , X を素因数分解したときの 3 の指数を Y とする。

(1) $X = 216 = 6^3$ となるのは、3 個のさいころの出た目が $\{6, 6, 6\}$ の場合であり、この確率は $\frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$ となる。

(2) $X = 36 = 6^2 = 2^2 \cdot 3^2$ となるのは、3 個のさいころの出た目について、

・ $\{1, 6, 6\}$ のとき $\frac{3!}{2!} = 3$ 通りがある。

・ $\{2, 3, 6\}$ のとき $3! = 6$ 通りがある。

・ $\{3, 3, 4\}$ のとき $\frac{3!}{2!} = 3$ 通りがある。

したがって、 $X = 36$ となる確率は、 $\frac{3+6+3}{6^3} = \frac{1}{18}$ となる。

(3) $Y = 0$ となるのは、3 個のさいころの出た目が 1, 2, 4, 5 のいずれかで、 4^3 通りの場合があることより、この確率は $\frac{4^3}{6^3} = \frac{8}{27}$ となる。

これより、 $Y \geq 1$ となる確率は、 $1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$ である。

(4) Y の値は、 $Y = 0, 1, 2, 3$ の場合があり、

(i) $Y = 3$ のとき 3 個のさいころの出た目が 3, 6 のいずれかである。

このとき 2^3 通りの場合があり、確率は $\frac{2^3}{6^3} = \frac{1}{27}$ となる。

(ii) $Y = 1$ のとき 3 個のさいころの出た目について、

・ 3 が 1 回で、残り 2 回は 1, 2, 4, 5 のいずれかのとき $3 \times 4^2 = 48$ 通り

・ 6 が 1 回で、残り 2 回は 1, 2, 4, 5 のいずれかのとき $3 \times 4^2 = 48$ 通り

このときの確率は、 $\frac{48+48}{6^3} = \frac{96}{6^3} = \frac{4}{9}$ となる。

(iii) $Y = 2$ のとき (3)の結果と(i)(ii)から、この確率は $\frac{19}{27} - \frac{1}{27} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$ となる。

以上より、 Y の期待値 E は、 $E = 0 \times \frac{8}{27} + 1 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{2}{9} + 3 \times \frac{1}{27} = 1$ である。

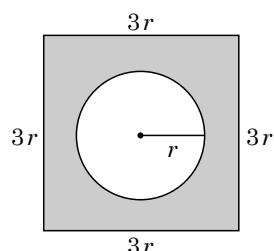
[コメント]

数え上げるタイプの確率問題です。そのため(3)では余事象を考え、(4)では数えにくそうな $Y = 2$ の確率を最後に計算しています。

3

問題のページへ

高さ h の四角柱から高さ h の円柱をくり抜いた立体図形 G について、その底面は右図のようになる。



(1) G の表面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= 2\{(3r)^2 - \pi r^2\} + 4 \cdot 3rh + 2\pi rh \\ &= 2(9 - \pi)r^2 + 2(6 + \pi)rh \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

(2) G の体積を V とすると、

$$V = \{(3r)^2 - \pi r^2\}h = (9 - \pi)r^2h \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①より、 $h = \frac{S - 2(9 - \pi)r^2}{2(6 + \pi)r} \cdots \cdots \textcircled{3}$ となり、②に代入すると、

$$V = (9 - \pi)r^2 \cdot \frac{S - 2(9 - \pi)r^2}{2(6 + \pi)r} = \frac{9 - \pi}{2(6 + \pi)} \{Sr - 2(9 - \pi)r^3\} \cdots \cdots \textcircled{4}$$

(3) $S = 6$ のとき、④より、 $V = \frac{9 - \pi}{2(6 + \pi)} \{6r - 2(9 - \pi)r^3\} = \frac{9 - \pi}{6 + \pi} \{3r - (9 - \pi)r^3\}$

さて、 $r > 0$ のもとで、③から $h = \frac{6 - 2(9 - \pi)r^2}{2(6 + \pi)r} > 0$ より、 $r < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9 - \pi}}$ となる。

そこで、 $0 < r < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9 - \pi}}$ において、 $f(r) = 3r - (9 - \pi)r^3$ とおくと、

$$\begin{aligned} f'(r) &= 3 - 3(9 - \pi)r^2 \\ &= 3\{1 - (9 - \pi)r^2\} \end{aligned}$$

$f(r)$ は増減が右表のようになるの

で、 $r = \frac{1}{\sqrt{9 - \pi}}$ のとき最大値をとり、

r	0	⋯	$\frac{1}{\sqrt{9 - \pi}}$	⋯	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9 - \pi}}$
$f'(r)$		+	0	−	
$f(r)$		↗		↘	

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{9 - \pi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{9 - \pi}} \left\{ 3 - (9 - \pi) \cdot \frac{1}{9 - \pi} \right\} = \frac{2}{\sqrt{9 - \pi}}$$

すると、 $V = \frac{9 - \pi}{6 + \pi} f(r)$ から、 V は $r = \frac{1}{\sqrt{9 - \pi}}$ のとき最大となり、最大値は、

$$\frac{9 - \pi}{6 + \pi} \cdot \frac{2}{\sqrt{9 - \pi}} = \frac{2\sqrt{9 - \pi}}{6 + \pi}$$

[コメント]

条件付きで最大値を求める微分の応用問題です。ただ、計算はやや面倒です。