**1**

解答例のページへ

実数$m>1$について，座標平面上に 3 点$\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(m,\ 0)$，$\mathrm{C}(m^2,\ 0)$をとる。点$\mathrm{P}(x,\ y)$は$\mathrm{AP}:\mathrm{CP}=1:m$を満たしながら動くとする。次の問いに答えよ。

(1)　点$\mathrm{P}(x,\ y)$の軌跡を求めよ。

(2)　次の等式を証明せよ。　$\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}=m(m+1)(m-x)$

(3)　$y\neq 0$とする。点$\mathrm{P}(x,\ y)$に対して$\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{BPC}$が成り立つことを示せ。

$\boxed{2}$ 解答例のページへ

実数$a>0$に対し，座標平面上の点$\mathrm{P}(a,\ 0)$をとる。曲線$y=\dfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$ $(x\geqq 0)$を $C$ とする。点 Q が曲線 $C$ 上を動くとき，$\mathrm{PQ}^2$の最小値を与える点 Q の $x$ 座標を$F(a)$とし，$\mathrm{PQ}^2$の最小値を$G(a)$とする。次の問いに答えよ。

(1)　$F(a)$を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{F(a)-a}{a^2}$を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{G(a)}{a^3}$を求めよ。

$\boxed{3}$

解答例のページへ

座標平面上の $0 \leqq x \leqq 2\log 2$ の範囲において，曲線 $y = e^x$ と曲線 $y = 2 - e^{2x}$，直線 $x = 2\log 2$ で囲まれた図形を $D$ とする。図形 $D$ を $x$ 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 $V$ を求めよ。

$\boxed{4}$　解答例のページへ

次の式によって与えられる数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{x_n\}$がある。

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}k\,,\ \ b_n=\sum_{k=1}^{n}k^2\,,\ \ x_n=\sum_{k=1}^{n}ka_k$$

次の問いに答えよ。

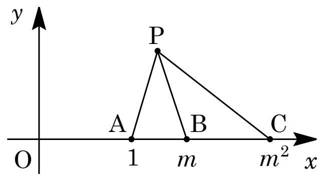
(1) $\dfrac{b_n}{a_n}$が整数となる $n$ をすべて求めよ。

(2) $x_n=\dfrac{1}{2}({a_n}^2+b_n)$を示せ。

(3) $\dfrac{x_n}{a_n}$が整数となる $n$ をすべて求めよ。

**1**

問題のページへ




(1)　$m>1$ のとき，3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(m,\ 0)$，$\mathrm{C}(m^2,\ 0)$ に対して，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が $\mathrm{AP}:\mathrm{CP}=1:m$ を満たすとき，

$\mathrm{CP}=m\mathrm{AP}$ から $\mathrm{CP}^2=m^2\mathrm{AP}^2$ となり，

$$(x-m^2)^2+y^2=m^2\{(x-1)^2+y^2\}$$

まとめると，$(m^2-1)x^2+(m^2-1)y^2=m^2(m^2-1)$ となり，点 P の軌跡は，

円 : $x^2+y^2=m^2$ ………(＊)

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(m-x,\ -y)$，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}=(m^2-x,\ -y)$ より，(＊)を適用すると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}&=(m-x)(m^2-x)+y^2=m^3-(m^2+m)x+x^2+y^2\\&=m^3-(m^2+m)x+m^2=m\{m^2-(m+1)x+m\}\\&=m\{m^2-(x-1)m-x\}=m(m+1)(m-x)\end{aligned}$$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(1-x,\ -y)$ より，(＊)を適用すると，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}&=(1-x)(m-x)+y^2=m-(m+1)x+x^2+y^2\\&=m-(m+1)x+m^2=m^2-(x-1)m-x=(m+1)(m-x)\end{aligned}$$

これより $\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}=m\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ となり，また(1)から $|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=m|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$ なので，

$$\cos\angle\mathrm{BPC}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}||\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}=\frac{m\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{m|\overrightarrow{\mathrm{PB}}||\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}||\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}=\cos\angle\mathrm{APB}$$

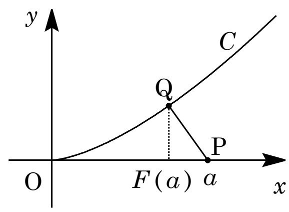
したがって，$\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{BPC}$ が成り立つ。

## ［コメント］

平面ベクトルと軌跡を組み合わせた基本的な問題です。なお，三角形の内角の二等分線の定理がベースになっています。

**2**

問題のページへ




(1)　点 $\mathrm{P}(a,\ 0)$ $(a>0)$ に対し，曲線 $C: y=\dfrac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$ $(x\geqq 0)$ 上の点 $\mathrm{Q}\left(t,\ \dfrac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\right)$ をとると，$\mathrm{PQ}^2=(t-a)^2+\dfrac{1}{9}t^3$ である。

ここで，$t\geqq 0$ において，$\mathrm{PQ}^2=f(t)$ とおくと，

$$f'(t)=2(t-a)+\frac{1}{3}t^2=\frac{1}{3}(t^2+6t-6a)$$

$f'(t)=0$ とおくと，$t\geqq 0$ から $t=-3+\sqrt{9+6a}$ となる。

これより，$f(t)$ の増減は右表のようになり，$\mathrm{PQ}^2=f(t)$ は $t=-3+\sqrt{9+6a}$ において最小値をとる。

| $t$ | $0$ | $\cdots$ | $-3+\sqrt{9+6a}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(t)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

よって，$F(a)=-3+\sqrt{9+6a}$ である。

(2)　$$\frac{F(a)-a}{a^2}=\frac{-a-3+\sqrt{9+6a}}{a^2}=\frac{(-a-3)^2-(9+6a)}{a^2(-a-3-\sqrt{9+6a})}=\frac{1}{-a-3-\sqrt{9+6a}}$$

これより，$\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{F(a)-a}{a^2}=\lim_{a\to+0}\frac{1}{-a-3-\sqrt{9+6a}}=\frac{1}{-3-\sqrt{9}}=-\frac{1}{6}$ ………①

(3)　$\mathrm{PQ}^2$ の最小値を $G(a)$ とおくと，$G(a)=\{F(a)-a\}^2+\dfrac{1}{9}\{F(a)\}^3$ となり，

$$\frac{G(a)}{a^3}=\frac{\{F(a)-a\}^2}{a^3}+\frac{\{F(a)\}^3}{9a^3}=a\cdot\left\{\frac{F(a)-a}{a^2}\right\}^2+\frac{1}{9}\left\{\frac{F(a)}{a}\right\}^3 \text{………②}$$

ここで，$\dfrac{F(a)}{a}=\dfrac{-3+\sqrt{9+6a}}{a}=\dfrac{(-3)^2-(9+6a)}{a(-3-\sqrt{9+6a})}=\dfrac{-6}{-3-\sqrt{9+6a}}$ となり，

$$\lim_{a\to+0}\frac{F(a)}{a}=\frac{-6}{-3-\sqrt{9}}=1 \text{………③}$$

①③を②に適用すると，$\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{G(a)}{a^3}=0\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{9}\cdot1^3=\frac{1}{9}$ である。

## ［コメント］

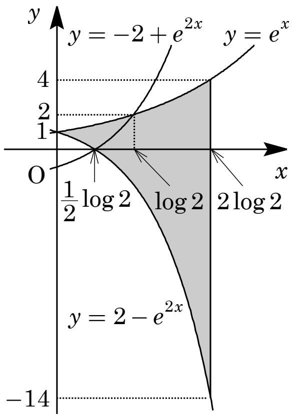
微分法と関数の極限の融合問題です。(2)を誘導として(3)の結果が導けます。なお，(1)は Q における接線と線分 PQ が直交するという条件を利用する手もあります。

**3**

問題のページへ

2 曲線 $y=e^x$ ……①，$y=2-e^{2x}$ ……②と直線 $x=2\log 2$ で囲まれた図形 $D$ を $x$ 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を $V$ とする。

まず，曲線②と $x$ 軸の交点は，$2-e^{2x}=0$ から $e^{2x}=2$，すなわち $x=\dfrac{1}{2}\log 2$ となる。




また，曲線②を $x$ 軸対称した曲線 $y=-2+e^{2x}$ ……③と曲線①の交点は，$e^x=-2+e^{2x}$ から $e^{2x}-e^x-2=0$ となり，

$$(e^x+1)(e^x-2)=0$$

$e^x+1>0$ より，$e^x=2$ から $x=\log 2$ となる。

ここで，$I_1=\displaystyle\int_0^{\log 2}(e^x)^2\,dx-\int_0^{\frac{1}{2}\log 2}(2-e^{2x})^2\,dx$，$I_2=\displaystyle\int_{\log 2}^{2\log 2}(2-e^{2x})^2\,dx$ とおくと，$V=(I_1+I_2)\pi$ となり，

$$I_1=\int_0^{\log 2}e^{2x}\,dx-\int_0^{\frac{1}{2}\log 2}(4-4e^{2x}+e^{4x})\,dx$$

$$=\Big[\frac{1}{2}e^{2x}\Big]_0^{\log 2}-\Big[4x-2e^{2x}+\frac{1}{4}e^{4x}\Big]_0^{\frac{1}{2}\log 2}$$

$$=\frac{1}{2}(4-1)-4\cdot\frac{1}{2}\log 2+2(2-1)-\frac{1}{4}(4-1)=\frac{11}{4}-2\log 2$$

$$I_2=\int_{\log 2}^{2\log 2}(4-4e^{2x}+e^{4x})\,dx=\Big[4x-2e^{2x}+\frac{1}{4}e^{4x}\Big]_{\log 2}^{2\log 2}$$

$$=4\cdot\log 2-2(16-4)+\frac{1}{4}(256-16)=36+4\log 2$$

以上より，$V=(I_1+I_2)\pi=\Big(\dfrac{11}{4}-2\log 2+36+4\log 2\Big)\pi=\Big(\dfrac{155}{4}+2\log 2\Big)\pi$

## ［コメント］

回転体の体積計算の問題です。曲線②が $x$ 軸の両側に存在するため，この曲線を $x$ 軸対称した曲線③を考え，曲線①と②の位置関係を把握しています。

**4**

問題のページへ

(1)　$a_n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$，$b_n=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$より，$\frac{b_n}{a_n}=\frac{2n+1}{3}$

$m$を整数として，条件より$\frac{b_n}{a_n}=m$とおくと，$2n+1=3m$ ………①

①を満たす$(n,\ m)$として$(n,\ m)=(1,\ 1)$があり，$2\cdot1+1=3\cdot1$から，

$$2(n-1)=3(m-1)$$

2と3は互いに素なので，$i$を整数として，$(n-1,\ m-1)=(3i,\ 2i)$となり，

$$n=3i+1,\ m=2i+1 \cdots\cdots\cdots ②$$

なお，$n\geqq1$から$3i+1\geqq1$となり，$i$は0以上の整数である。

(2)　$x_n=\sum_{k=1}^{n}ka_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2(k+1)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^3+k^2)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^3+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}k^2$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2+\frac{1}{2}b_n=\frac{1}{2}{a_n}^2+\frac{1}{2}b_n=\frac{1}{2}({a_n}^2+b_n)$$

(3)　$l$を整数として，条件より$\frac{x_n}{a_n}=l$とおくと，(2)から$\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{b_n}{a_n}\right)=l$ ………③

さて，$a_n$は整数なので，$\frac{b_n}{a_n}$は整数であることが必要で，②から$n=3i+1$より，

$$a_n=\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2),\ \frac{b_n}{a_n}=m=2i+1$$

すると，$\frac{x_n}{a_n}$が整数である条件は，③より$\frac{1}{2}(3i+1)(3i+2)+(2i+1)=2l$となり，

$$9i^2+13i+4=4l,\ (i+1)(9i+4)=4l \cdots\cdots\cdots ④$$

ここで，以下$\mathrm{mod}\,4$で記すと，$4l\equiv0$であり，

- $i\equiv0$のとき　$(i+1)(9i+4)\equiv1\cdot4\equiv0$
- $i\equiv1$のとき　$(i+1)(9i+4)\equiv2\cdot13\equiv2\cdot1\equiv2$
- $i\equiv2$のとき　$(i+1)(9i+4)\equiv3\cdot22\equiv3\cdot2\equiv6\equiv2$
- $i\equiv3$のとき　$(i+1)(9i+4)\equiv4\cdot31\equiv0\cdot3\equiv0$

すると，④は$i=4j$または$i=4j+3$のとき成り立ち，このとき，

$$n=3\cdot4j+1=12j+1,\ n=3(4j+3)+1=12j+10$$

なお，$i\geqq0$から，ともに$j\geqq0$となり，$j$は0以上の整数である。

## ［コメント］

数列の和と整数の融合問題です。(3)はいろいろな方法が考えられますが，解答例は(1)と(2)の結果を利用する方法で記しています。