1

解答解説のページへ

3 次関数 $f(x)=x^3+k(x^2+x+1)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ が極値をもつための定数 k の値の範囲を求めよ。

(2)　$f(x)$ が極値をとる x の値を α，β　$(\alpha<\beta)$ とする。このとき, 4 点

$$\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha)),\ \mathrm{B}(\alpha,\ f(\beta)),\ \mathrm{C}(\beta,\ f(\beta)),\ \mathrm{D}(\beta,\ f(\alpha))$$

を頂点とする長方形 ABCD が正方形となる k の値を求めよ。

(3)　(2)で得られた正方形の 1 辺の長さを求めよ。

2

解答解説のページへ

O を頂点とする空間に，点 A$(5,\ 1,\ -1)$ を通り，$\vec{a}=(1,\ 2,\ 1)$ を方向ベクトルとする直線 g と，点 B$(6,\ -4,\ 0)$ を通り，$\vec{b}=(1,\ -1,\ -1)$ を方向ベクトルとする直線 h がある。いま，点 P，Q がそれぞれ g，h 上にあり，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は，g と h の両方に垂直となっている。次の問いに答えよ。

(1)　P, Q の座標を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角を θ とおくとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(3)　$\triangle$OPQ の面積を求めよ。

$\boxed{3}$

解答解説のページへ

複素数平面上で，複素数α，β，γを表す点をそれぞれ A, B, C とする。次の問いに答えよ。

(1)　A, B, C が正三角形の 3 頂点であるとき,

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

が成立することを示せ。

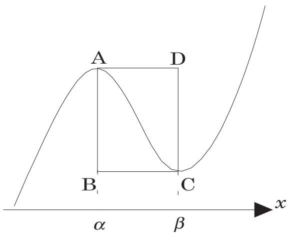
(2)　逆に，この関係式$(*)$が成立するとき，A = B = C となるか，または A, B, C が正三角形の 3 頂点となることを示せ。

$\boxed{1}$ 問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3+kx^2+kx+k$，$f'(x)=3x^2+2kx+k$

$f(x)$が極値をもつ条件は，$f'(x)=0$が異なる2実数解をもつことである。

$D/4=k^2-3k>0$より，$k<0$，$3<k$



(2)　$\alpha<\beta$より，$f(\alpha)$が極大値，$f(\beta)$が極小値。

長方形ABCDが正方形である条件は，BC = BA

$\beta-\alpha=f(\alpha)-f(\beta)$ ………①

ここで，$f(\alpha)-f(\beta)=\int_{\beta}^{\alpha}f'(x)\,dx=\int_{\beta}^{\alpha}3(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

$=3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\alpha-\beta)^3=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$

①から，$\beta-\alpha=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$

$\alpha\neq\beta$より，$(\beta-\alpha)^2=2$ ………②

$(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=2$

α，βは$f'(x)=0$の解より，$\left(-\frac{2k}{3}\right)^2-4\cdot\frac{k}{3}=2$

$2k^2-6k-9=0$，$k=\frac{3\pm3\sqrt{3}}{2}$（これはともに$k<0$，$3<k$をみたす）

(3)　②より，$\beta-\alpha=\sqrt{2}$なので，正方形の一辺の長さは$\sqrt{2}$となる。

［解 説］

(2)は，東大の文理共通の第 1 問と同様に，またこの解法を使ってしまいました。使用できる状況は限定されますが，いったん知ってしまうと，つい使いたくなる便利な方法です。

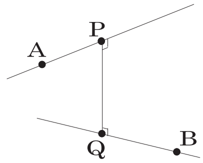
2

問題のページへ

(1) P は g 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\vec{a}$

また, Q は h 上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\vec{b}$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\vec{a}-t\vec{b}$$



条件より，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{a}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{a}+s\vec{a}\cdot\vec{b}-t|\vec{a}|^2=0$

$$-8-2s-6t=0,\ \ 4+s+3t=0\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{b}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{b}+s|\vec{b}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$$5+3s+2t=0\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$t=s=-1$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(5,\ 1,\ -1)-(1,\ 2,\ 1)=(4,\ -1,\ -2)$ より，$\mathrm{P}(4,\ -1,\ -2)$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(6,\ -4,\ 0)-(1,\ -1,\ -1)=(5,\ -3,\ 1)$ より，$\mathrm{Q}(5,\ -3,\ 1)$

(2) $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}=\dfrac{21}{\sqrt{21}\sqrt{35}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

(3) (2)より，$\sin\theta=\sqrt{1-\dfrac{15}{25}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ なので,

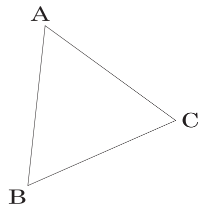
$$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{21}\cdot\sqrt{35}\cdot\frac{\sqrt{10}}{5}=\frac{7}{2}\sqrt{6}$$

［解 説］

ねじれの位置にある 2 直線の共通垂線が題材となっている超頻出問題です。なお, (3)は公式 $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}})^2}$ を用いてもよいのですが, そうすると, (2)の設問を誘導として考えた出題者の機嫌を損ねることになります。

$\boxed{3}$

問題のページへ



(1)　条件より，$\left|\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right|=1$，$\arg\left(\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)=\pm60°$ なので,

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos(\pm60°)+i\sin(\pm60°)=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}-\dfrac{1}{2}=\pm\dfrac{\sqrt{3}i}{2}$ として,両辺を 2 乗すると,

$$\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2-\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}+\frac{1}{4}=-\frac{3}{4}$$

$$(\gamma-\alpha)^2-(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)^2=0$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$$

(2)　$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$ を変形して,

$$(\gamma-\alpha)^2-(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)^2=0$$

(i)　$\beta-\alpha=0$ のとき

$(\gamma-\alpha)^2=0$，$\gamma-\alpha=0$ となり，$\alpha=\beta=\gamma$

よって，A = B = C

(ii)　$\beta-\alpha\neq0$ のとき

(1)から，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=\cos(\pm60°)+i\sin(\pm60°)$

よって, A, B, C が正三角形の 3 頂点となる。

［解 説］

複素数平面の有名題で，参考書にはまず載っている問題です。いま手元にあるものでも，たとえば『青チャート』の数学 B の 85 ページとか，『1 対 1 対応演習』の数学 B の 87 ページに，まったく同じ問題が入っています。