$\boxed{1}$　　解答解説のページへ

k は $k>0$，$k\neq 1$ をみたし，θ は $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ をみたす実数とする。次の問いに答えよ。

(1)　座標平面上で，2 定点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ からの距離の比が $1:k$ であるような点の軌跡は円になることを示し，その中心 $(X,\ Y)$ および半径 r を k と θ を用いて表せ。

(2)　θ は固定したままで，k のみを与えられた範囲で動かすとき，$(X,\ Y)$ のえがく軌跡を求めよ。

(3)　k，θ を与えられた範囲でともに動かすとき，$(X,\ Y)$ の存在する領域を図示せよ。

2

解答解説のページへ

行列 A を $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ で与える。実数 x, y と自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\cdots$ に対して，

x_n，y_n を $\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ により定める。ただし，A^n は A の n 個の積である。

(1)　$A^n=\begin{pmatrix}2^n & 3^n-2^n\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}$ であることを示せ。

(2)　$0\leqq x<1$，$0\leqq y<1$ の範囲で，x_n-x と y_n-y がともに整数となるような x, y の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

3

解答解説のページへ

$0<h<1$ とする。xy 平面上で，曲線 $y=e^{-x^2}$ と直線 $y=h$ とで囲まれた図形を，y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $V(h)$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$V(h)$ を求めよ。

(2)　自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\cdots$ に対し，$2^n>\dfrac{n(n+1)}{2}$ が成立することを示せ。

(3)　$h=2^{-n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}V(2^{-n})$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ に対し，不等式 $\sin\theta \leqq \theta \leqq \tan\theta$ が成立することを示せ。

(2)　正の実数 x と自然数 $n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$ に対し，複素数 $1 + \dfrac{x}{n}i$ の偏角を θ_n $(0 \leqq \theta_n < 2\pi)$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\theta_n$ を求めよ。

(3)　(2)で与えた複素数の n 乗 $\left(1 + \dfrac{x}{n}i\right)^n$ の実部を a_n とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　PA : PB $=1:k$ より，$PB^2 = k^2 PA^2$

$$(x-\cos\theta)^2+(y-\sin\theta)^2=k^2\left\{x^2+(y-1)^2\right\}$$

まとめて，$x^2+y^2+\dfrac{2\cos\theta}{k^2-1}x+\dfrac{2(\sin\theta-k^2)}{k^2-1}y+1=0$

$$\left(x+\frac{\cos\theta}{k^2-1}\right)^2+\left(y+\frac{\sin\theta-k^2}{k^2-1}\right)^2=\frac{2k^2(1-\sin\theta)}{(k^2-1)^2}$$

よって，$(X,\ Y)=\left(-\dfrac{\cos\theta}{k^2-1},\ -\dfrac{\sin\theta-k^2}{k^2-1}\right)$，$r=\dfrac{\sqrt{2}k\sqrt{1-\sin\theta}}{|k^2-1|}$

(2)　(1)より，$X=-\dfrac{\cos\theta}{k^2-1}$ ………①，$Y=-\dfrac{\sin\theta-k^2}{k^2-1}$ ………②

①より，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ なので $X\neq0$ から，$k^2=1-\dfrac{\cos\theta}{X}$ ………③

②より，$Y(k^2-1)=-(\sin\theta-k^2)$

③を代入して，$Y\cdot\left(-\dfrac{\cos\theta}{X}\right)=-\sin\theta+\left(1-\dfrac{\cos\theta}{X}\right)$

$$Y=\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta}X+1 \text{ ………④}$$

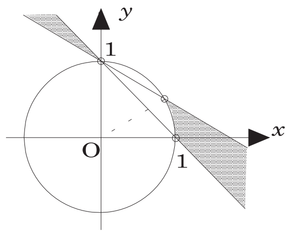
ただし，$k>0$ なので，③から $1-\dfrac{\cos\theta}{X}>0$

$\dfrac{X-\cos\theta}{X}>0$，$\cos\theta>0$ から，$X<0$，$\cos\theta<X$

また，$\dfrac{\cos\theta}{X}\neq0$ から，$k\neq1$ は成立する。

よって点 $(X,\ Y)$ の軌跡は，2 本の半直線 $y=\dfrac{\sin\theta-1}{\cos\theta}x+1$ $(x<0,\ \cos\theta<x)$

(3)　④は 2 点 $(0,\ 1)$，$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ を通る直線で，
$X<0$，$\cos\theta<X$ から，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$ に考慮すると，
求める $(X,\ Y)$ の存在する領域は，右図のようになる。ただし，円周上以外の境界線は含む。



［解　説］

(3)の存在領域を求めるのに，(2)が適切な誘導となっています。直線④が 2 点 $A(0,\ 1)$，$B(\cos\theta,\ \sin\theta)$ をつねに通るということを発見するのがポイントです。

$\boxed{2}$ 問題のページへ

(1) 数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $n=1$ のときは，明らかに成立する。

(ii) $n=k$ のとき，成立を仮定して，

$$A^{k+1}=A^kA=\begin{pmatrix}2^k & 3^k-2^k\\ 0 & 3^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2^{k+1} & 2^k+3^{k+1}-3\cdot 2^k\\ 0 & 3^{k+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{k+1} & 3^{k+1}-2^{k+1}\\ 0 & 3^{k+1}\end{pmatrix}$$

(i)(ii)より，$n\geqq 1$ で題意は成立する。

(2) $\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n & 3^n-2^n\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^nx+(3^n-2^n)y\\ 3^ny\end{pmatrix}$ から，

$$x_n-x=(2^n-1)x+(3^n-2^n)y\cdots\cdots\cdots①,\quad y_n-y=(3^n-1)y\cdots\cdots\cdots②$$

まず，y_n-y が整数で $0\leqq y<1$ なので，②から y のとりうる値は，

$$y=0,\ \frac{1}{3^n-1},\ \frac{2}{3^n-1},\cdots\cdots\cdots,\ \frac{3^n-2}{3^n-1}$$

$$y=\frac{k}{3^n-1}\quad(k\text{ は }0\text{ 以上，}3^n-2\text{ 以下の整数})\cdots\cdots\cdots③$$

また，①を変形して，$x_n-x=(2^n-1)(x-y)+(3^n-1)y$

x_n-x，y_n-y が整数より，$(2^n-1)(x-y)$ が整数となる。

$0\leqq x<1$，$0\leqq y<1$ なので，$-1<x-y<1$ となり，

$$x-y=-\frac{2^n-2}{2^n-1},\ -\frac{2^n-3}{2^n-1},\cdots\cdots,\ -\frac{1}{2^n-1},\ 0,\ \frac{1}{2^n-1},\cdots\cdots,\ \frac{2^n-2}{2^n-1}$$

$$y=x+\frac{l}{2^n-1}\quad(l\text{ は }-(2^n-2)\text{ 以上，}2^n-2\text{ 以下の整数})\cdots\cdots\cdots④$$

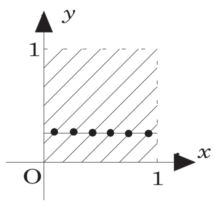
以上より，求める $(x,\ y)$ は，直線③と④の交点となる。

k の値を固定して考えると，$0\leqq x<1$，$0\leqq y<1$ で，

直線③は，直線 $y=x$ と 1 つの交点をもち，2 直線

$$y=x+\frac{-m}{2^n-1},\quad y=x+\frac{2^n-1-m}{2^n-1}\quad(1\leqq m\leqq 2^n-2)$$

のいずれか一方と交点をもつ。すなわち，2^n-1 個の交点をもつことになる。



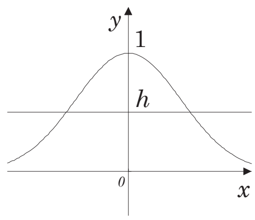
異なる k の値は 3^n-1 個あるので，$(x,\ y)$ の個数は $(2^n-1)(3^n-1)$ となる。

［解 説］

(2)が本年度，金沢大の最難問です。$(x,\ y)$ の個数を求める際に，頭が混乱します。上の解のように図を書けば，思考が整理できます。

3

問題のページへ



(1)　$y=e^{-x^2}$ より，$x^2=-\log y$

$$V(h)=\pi\int_h^1(-\log y)\,dy=-\pi\left[\,y\log y-y\,\right]_h^1$$

$$=\pi(h\log h+1-h)$$

(2)　$n\geqq 2$ のとき，数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$n=2$ のとき，$2^2>\dfrac{2\cdot 3}{2}$ より成立。

(ii)　$n=k$ のとき，$2^k>\dfrac{k(k+1)}{2}$ と成立を仮定する。

両辺×2 より，$2^{k+1}>k(k+1)$

ここで，$k(k+1)-\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}=\dfrac{(k+1)(2k-k-2)}{2}=\dfrac{(k+1)(k-2)}{2}\geqq 0$

よって，$2^{k+1}>\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

(i)(ii)より，$n\geqq 2$ のとき，$2^n>\dfrac{n(n+1)}{2}$

なお，$n=1$ のときは，$2^1>\dfrac{1\cdot 2}{2}$ より成立。

以上より，$n\geqq 1$ で，$2^n>\dfrac{n(n+1)}{2}$

(3)　$V(2^{-n})=\pi(2^{-n}\log 2^{-n}+1-2^{-n})=\pi\left(-\dfrac{n\log 2}{2^n}+1-\dfrac{1}{2^n}\right)$

(2)より，$0<\dfrac{1}{2^n}<\dfrac{2}{n(n+1)}$ なので，$0<\dfrac{n\log 2}{2^n}<\dfrac{2n\log 2}{n(n+1)}=\dfrac{2\log 2}{n+1}$

よって，$n\to\infty$ のとき，$\dfrac{n\log 2}{2^n}\to 0$

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}V(2^{-n})=\pi$

［解 説］

微積分についての基本題で，完答が望まれる問題です。なお，(2)は二項定理を用いても証明することができます。

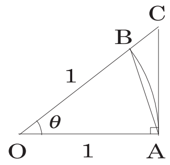
4

問題のページへ

(1)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，右下図より△OAB＜扇形 OAB＜△OAC

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin\theta<\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\theta<\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan\theta$$

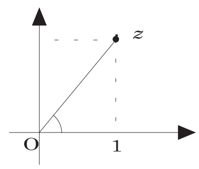
$$\sin\theta<\theta<\tan\theta$$



$\theta=0$ のときは，$\sin\theta=\theta=\tan\theta=0$

よって，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin\theta\leqq\theta\leqq\tan\theta$

(2)　$x>0$，$n\geqq 1$ より，$0<\theta_n<\dfrac{\pi}{2}$



$$\tan\theta_n=\frac{x}{n},\quad \sin\theta_n=\frac{\dfrac{x}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{n^2}}}$$

(1)から，$\dfrac{\dfrac{x}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{n^2}}}<\theta_n<\dfrac{x}{n}$ なので，$\dfrac{x}{\sqrt{1+\dfrac{x^2}{n^2}}}<n\theta_n<x$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\theta_n=x$

(3)　z は極形式で $z=\sqrt{1+\dfrac{x^2}{n^2}}(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$ と書けるので，z^n の実部 a_n は，

ド・モアブルの定理から，

$$a_n=\left(\sqrt{1+\frac{x^2}{n^2}}\right)^n\cos n\theta_n=\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}\cos n\theta_n=\left\{\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{x^2}}\right\}^{\frac{x^2}{2n}}\cos n\theta_n$$

(2)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=e^0\cos x=\cos x$

［解　説］

(1)で $f(\theta)=\theta-\sin\theta$，$g(\theta)=\tan\theta-\theta$ とおき，微分して単調増加を示すという方法は好ましくありません。というのも，高校数学の普通の立場では，この証明すべき不等式をもとにして，三角関数の微分の公式を導いているからです。そのため上のような解の方が望ましいと考えられます。ちょっと疑問の残る出題です。