1

解答解説のページへ

平地を東西にのびる直線道路 l と，その北側に 3 地点 A，B，C があり，それぞれの地点には目じるしが置かれている。

l 上の地点 P で A, B, C を見ると，直線 AP は l に垂直で，B, C は直線 AP の東側にあり，$\angle APB = 30°$，$\angle APC = 60°$ であった。P から東へ $100\sqrt{3}$ 移動した l 上の地点 Q では，Q, B, A が一直線上にあり，$\angle BQP = 30°$ であった。Q からさらに東へ移動した l 上の地点 R では，R, C, A が一直線上にあり，$\angle CRQ = 15°$ であった。次の問いに答えよ。

(1)　$\cos 15° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ を示せ。

(2)　2 地点 A, C 間の距離 AC を求めよ。

(3)　2 地点 B, C 間の距離の 2 乗 BC^2 を求めよ。

2

解答解説のページへ

関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ について，次の問いにそれぞれ答えよ。

(1)　関数 $f(x)$ が $x=0$ で極小になるとき，定数 a, b の満たす条件を求めよ。

(2)　実数 s, t が $s\neq 0$，$t<s^3+1$ を満たすならば，関数 $f(x)$ が $x=s$ で極小値 t をとるように定数 a, b を，s と t を用いて定めることができることを示せ。

3

解答解説のページへ

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は座標平面上のベクトルで, $\vec{a}=(0,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ 1)$, $\vec{c}=(1,\ -1)$ とする。$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ とし, 各 k についてベクトル $\overrightarrow{p_k}$ はベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ のいずれかとする。次の問いに答えよ。

(1)　$n=2$ とする。$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}$ がとり得るベクトルのうち, 異なるものをすべて成分で表せ。

(2)　$n=4$ とする。内積 $\vec{a}\cdot(\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}+\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4})$ がとり得る値のうち, 異なるものはいくつあるか。

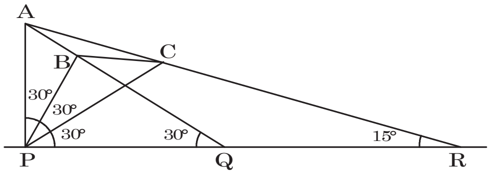
(3)　$n=5$ とする。順序をつけて並べた列 $\overrightarrow{p_1}$, $\overrightarrow{p_2}$, $\overrightarrow{p_3}$, $\overrightarrow{p_4}$, $\overrightarrow{p_5}$ で, 条件 $\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}+\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}+\overrightarrow{p_5}=(4,\ 1)$ を満たすものはいくつあるか。

1

問題のページへ

(1)　$\cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ)$

$$= \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$



(2)　$AP = 100\sqrt{3}\tan 30^\circ = 100$

また，$\angle ACP = \angle CPR + \angle CRP = 30^\circ + 15^\circ = 45^\circ$

$\triangle APC$ に正弦定理を適用して，$\dfrac{AC}{\sin 60^\circ} = \dfrac{100}{\sin 45^\circ}$

$$AC = 100\cdot\frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = 50\sqrt{6}$$

(3)　$\angle ABP = 90^\circ$ より，$AB = 100\sin 30^\circ = 50$

また，$\angle RAQ = \angle AQP - \angle ARQ = 30^\circ - 15^\circ = 15^\circ$

(1), (2)の結果を利用して，$\triangle ACB$ に余弦定理を適用すると，

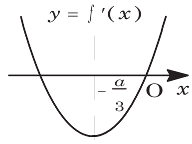
$$BC^2 = (50\sqrt{6})^2 + 50^2 - 2\cdot 50\sqrt{6}\cdot 50\cos 15^\circ$$
$$= 50^2\left(6 + 1 - 2\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$$
$$= 2500(4-\sqrt{3})$$

［解 説］

問題文が長いのですが，題意をいったん図示できれば，よく見かける構図の問題であることがわかります。(2)は正弦定理, (3)は余弦定理を利用するだけです。

$\boxed{2}$

問題のページへ



(1)　$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$，$f'(x)=3x^2+2ax+b$

　$x=0$ で極小になる条件は，$x=0$ の前後で $f'(x)$ の符号が負から正へと変化することなので，$f'(0)=0$ かつ $-\dfrac{a}{3}<0$ である。

　よって, $a>0$ かつ $b=0$

(2)　$x=s$ で極小となる条件は, (1)と同様にすると，$f'(s)=0$ かつ $-\dfrac{a}{3}<s$

$$3s^2+2as+b=0\cdots\cdots①,\quad s+\frac{a}{3}>0\cdots\cdots②$$

　また，極小値が t なので $f(s)=t$ より，

$$s^3+as^2+bs+1=t\cdots\cdots\cdots③$$

　以下，実数 s, t が $s\neq 0$，$t<s^3+1$ を満たすとき，①②③を満たす定数 a, b が存在することを示す。

　①より，$b=-3s^2-2as\cdots\cdots\cdots①'$

　③に代入して，$s^3+as^2-(3s^2+2as)s+1=t$

$$as^2=-2s^3-t+1$$

　$s\neq 0$ より，$a=\dfrac{-2s^3-t+1}{s^2}\cdots\cdots\cdots④$

　①$'$ より，$b=-3s^2-2s\cdot\dfrac{-2s^3-t+1}{s^2}=\dfrac{s^3+2t-2}{s}\cdots\cdots\cdots⑤$

　ここで，④を用いると，

$$s+\frac{a}{3}=s+\frac{-2s^3-t+1}{3s^2}=\frac{s^3-t+1}{3s^2}>0\quad(t<s^3+1\text{ より})$$

　すなわち，④で定めた a によって②は満たされている。

　したがって，$s\neq 0$，$t<s^3+1$ のとき，関数 $f(x)$ が $x=s$ で極小値 t をとるように，定数 a を④, b を⑤として定めることができる。

［解 法］

(2)は存在証明という解の書きにくい問題です。そこで，①～③を導いた後，交通整理をしてみました。

3

問題のページへ

(1)　$\overrightarrow{p_1}$，$\overrightarrow{p_2}$は$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$のいずれかなので，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を 2 つ組み合わせて和を計算すると，$2\vec{a}=(0,\ 2)$，$2\vec{b}=(2,\ 2)$，$2\vec{c}=(2,\ -2)$，$\vec{a}+\vec{b}=(1,\ 2)$，$\vec{b}+\vec{c}=(2,\ 0)$，$\vec{c}+\vec{a}=(1,\ 0)$となるので，

$$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}=(0,\ 2),\ (2,\ 2),\ (2,\ -2),\ (1,\ 2),\ (2,\ 0),\ (1,\ 0)$$

(2)　$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}+\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}=(k,\ l)$とおくと，$\vec{a}\cdot(\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}+\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4})=l$

(1)より，$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}$の y 成分は-2または 0 または 2 であり，また$\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}$の y 成分も-2または 0 または 2 である。

よって，$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}+\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}$の y 成分，すなわち l は$l=-4,\ -2,\ 0,\ 2,\ 4$となり，$\vec{a}\cdot(\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}+\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4})$は異なる値を 5 つもつ。

(3)　$\overrightarrow{p_5}$は$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$のいずれかなので，これをもとに場合分けをする。

(i)　$\overrightarrow{p_5}=\vec{a}$のとき　条件より$(k,\ l)+(0,\ 1)=(4,\ 1)$なので，$(k,\ l)=(4,\ 0)$

$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}=(2,\ -2)$，$\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}=(2,\ 2)$のとき, (1)より$1\times1=1$通り

$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}=(2,\ 0)$，$\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}=(2,\ 0)$のとき, (1)より$2\times2=4$通り

$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}=(2,\ 2)$，$\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}=(2,\ -2)$のとき, (1)より$1\times1=1$通り

したがって，$1+4+1=6$通り

(ii)　$\overrightarrow{p_5}=\vec{b}$のとき　条件より$(k,\ l)+(1,\ 1)=(4,\ 1)$なので，$(k,\ l)=(3,\ 0)$

$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}=(2,\ -2)$，$\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}=(1,\ 2)$のとき, (1)より$1\times2=2$通り

$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}=(2,\ 0)$，$\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}=(1,\ 0)$のとき, (1)より$2\times2=4$通り

$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}=(1,\ 0)$，$\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}=(2,\ 0)$のとき, (1)より$2\times2=4$通り

$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}=(1,\ 2)$，$\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}=(2,\ -2)$のとき, (1)より$2\times1=2$通り

したがって，$2+4+4+2=12$通り

(iii)　$\overrightarrow{p_5}=\vec{c}$のとき　条件より$(k,\ l)+(1,\ -1)=(4,\ 1)$なので，$(k,\ l)=(3,\ 2)$

$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}=(1,\ 0)$，$\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}=(2,\ 2)$のとき, (1)より$2\times1=2$通り

$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}=(2,\ 0)$，$\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}=(1,\ 2)$のとき, (1)より$2\times2=4$通り

$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}=(1,\ 2)$，$\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}=(2,\ 0)$のとき, (1)より$2\times2=4$通り

$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}=(2,\ 2)$，$\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}=(1,\ 0)$のとき, (1)より$1\times2=2$通り

したがって，$2+4+4+2=12$通り

(i)(ii)(iii)より，$\overrightarrow{p_1}$，$\overrightarrow{p_2}$，$\overrightarrow{p_3}$，$\overrightarrow{p_4}$，$\overrightarrow{p_5}$の順列は$6+12+12=30$通りある。

［解 説］

(1)は(2)の誘導, (2)は(3)の誘導という最初に考えた解を書きました。