1

解答解説のページへ

三角形 ABC において $\angle\mathrm{ABC} = 45^\circ$ であり，また辺 BC 上にある点 D は $\mathrm{BD} = 1$，$\mathrm{CD} = \sqrt{3} - 1$，$\angle\mathrm{ADB} = \angle\mathrm{ACB} + 15^\circ$，$\angle\mathrm{ADB} \geqq 90^\circ$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　$\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ を示せ。

(2)　$\angle\mathrm{ACB}$ の大きさを求めよ。

2

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　絶対値が 1 の複素数 α_1，α_2，α_3 が $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3$ を満たすとき，α_1，α_2，α_3 を求めよ。

(2)　β_1，β_2，γ を絶対値が 1 の複素数とし，$P(z)=\beta_2 z^2+\beta_1 z+(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)$ が $\dfrac{1}{\gamma}P(\gamma)=3$ を満たすとする。ただし，i は虚数単位である。このとき，β_1，β_2，γ を求め，さらに実数 t が $0\leqq t\leqq 1$ を動くとき，複素数平面上で点 $P(\gamma t)$ が描く軌跡を求めよ。

3

解答解説のページへ

n を自然数とする。a は $a>1$ を満たす実数とし，$f(a)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 |ax^n-1|dx+\dfrac{1}{2}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$f(a)$ を求めよ。

(2)　関数 $f(a)$ の $a>1$ における最小値を b_n とする。b_n を求めよ。

(3)　(2)で求めた b_n（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）に対して，$m+1$ 個の数の積 $b_m\cdot b_{m+1}\cdots\cdots b_{2m}$ を c_m（$m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）とおく。このとき，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}c_m$ を求めよ。

4

解答解説のページへ

行列 $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ について，次の問いに答えよ。

(1) A の n 個の積 A^n を求めよ。ただし, n は自然数とする。

(2) $a\geqq 0$, $b\geqq 0$, $c\geqq 0$, $d\geqq 0$ とする。行列 $B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ が $A^2B=BA$，$B^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ を満たすとき, B を求めよ。

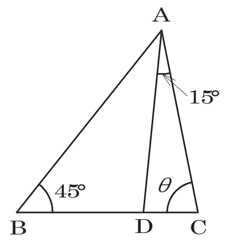
(3) (2)で求めた B に対して，$BA^2BA^{25}BA^{1999}$ を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$\sin 15^\circ = \sin(60^\circ - 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ - \cos 60^\circ \sin 45^\circ$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$



(2)　$\angle \mathrm{ACB} = \theta$ とおくと，$\angle \mathrm{BAD} = 120^\circ - \theta$ となる。

$\triangle \mathrm{ABD}$ に正弦定理を適用して，$\dfrac{1}{\sin(120^\circ - \theta)} = \dfrac{\mathrm{AD}}{\sin 45^\circ}$

$$\mathrm{AD} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin(120^\circ - \theta)} = \frac{1}{\sqrt{2}\sin(120^\circ - \theta)} \cdots\cdots\cdots①$$

$\triangle \mathrm{ADC}$ に正弦定理を適用して，$\dfrac{\mathrm{AD}}{\sin\theta} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sin 15^\circ}$

$$\mathrm{AD} = \frac{(\sqrt{3} - 1)\sin\theta}{\sin 15^\circ} = \frac{4\sin\theta}{\sqrt{2}} \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{1}{\sqrt{2}\sin(120^\circ - \theta)} = \dfrac{4\sin\theta}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta\sin(120^\circ - \theta) = \dfrac{1}{4}$

$$-\frac{1}{2}\{\cos 120^\circ - \cos(2\theta - 120^\circ)\} = \frac{1}{4},\ \cos(2\theta - 120^\circ) = 0$$

ここで $\theta > 0^\circ$，$120^\circ - \theta > 0^\circ$，また条件より $\theta + 15^\circ \geqq 90^\circ$ なので，$75^\circ \leqq \theta < 120^\circ$

よって，$2\theta - 120^\circ = 90^\circ$，$\theta = \angle \mathrm{ACB} = 105^\circ$

［解 説］

正弦定理の応用問題です。なお，△ABC は計算の結果では鈍角三角形となり，上の解に書いた図とは異なりますが，題意を図示すると，まずこのように書くのではないかと思い，敢えてそのままにしています。

2

問題のページへ

(1)　$|\alpha_1|=|\alpha_2|=|\alpha_3|=1$ より，

$$\alpha_1=\cos\theta_1+i\sin\theta_1,\ \alpha_2=\cos\theta_2+i\sin\theta_2,\ \alpha_3=\cos\theta_3+i\sin\theta_3$$

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3$ より，

$$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3=3\cdots\cdots①,\ \sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3=0\cdots\cdots②$$

①より，$\cos\theta_1=\cos\theta_2=\cos\theta_3=1$

すると $\sin\theta_1=\sin\theta_2=\sin\theta_3=0$ となり，②を満たす。

以上より，$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1$

(2)　$\omega=\cos30°+i\sin30°$ とおくと，$P(z)=\beta_2z^2+\beta_1z+\omega$

$\dfrac{1}{\gamma}P(\gamma)=3$ から，$\beta_2\gamma+\beta_1+\dfrac{\omega}{\gamma}=3$

ここで，$|\beta_2\gamma|=|\beta_2||\gamma|=1$，$|\beta_1|=1$，$\left|\dfrac{\omega}{\gamma}\right|=\dfrac{|\omega|}{|\gamma|}=1$ より(1)を用いると，

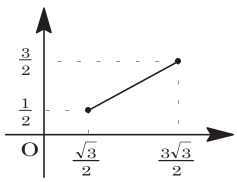
$$\beta_2\gamma=\beta_1=\frac{\omega}{\gamma}=1$$

よって，$\beta_1=1$，$\gamma=\omega=\cos30°+i\sin30°=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$

$$\beta_2=\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\omega}=\cos30°-i\sin30°=\frac{\sqrt{3}-i}{2}$$

すると，$P(z)=\dfrac{1}{\omega}z^2+z+\omega$

$$P(\gamma t)=P(\omega t)=\frac{1}{\omega}\cdot(\omega t)^2+\omega t+\omega=(t^2+t+1)\omega$$



$0\leqq t\leqq1$ より，$1\leqq t^2+t+1\leqq3$ なので，点 $P(\gamma t)$ は 2 点 ω，3ω を結ぶ線分を描く。

［解 説］

複素数平面上では，α_1，α_2，α_3 が単位円周上にあることより，$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1$ は明らかなのですが，それをスキッと示そうとすると，予想以上に困難でした。最初は，$\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{3}=1$ として「重心」を使おうかと思いましたが，直観的すぎるのではないかと考え止めました。結局，極形式を用いた普通の方法に落ち着きました。

3

問題のページへ

(1)　$ax^n-1=0$（$x>0$）の解は $x=a^{-\frac{1}{n}}$ となり，$a^{-\frac{1}{n}}=\alpha$ とおくと $0<\alpha<1$ より，

$$\int_0^1|ax^n-1|dx=\int_0^\alpha -(ax^n-1)dx+\int_\alpha^1(ax^n-1)dx$$

$$=-\left[\frac{a}{n+1}x^{n+1}-x\right]_0^\alpha+\left[\frac{a}{n+1}x^{n+1}-x\right]_\alpha^1=-\frac{2a}{n+1}\alpha^{n+1}+2\alpha+\frac{a}{n+1}-1$$

$$=-\frac{2a}{n+1}\cdot\frac{1}{a}\alpha+2\alpha+\frac{a}{n+1}-1=\frac{2n}{n+1}\alpha+\frac{a}{n+1}-1\quad（a^{-\frac{1}{n}}=\alpha より）$$

すると，$f(a)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1|ax^n-1|dx+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2n}{n+1}\alpha+\dfrac{a}{n+1}-1\right)+\dfrac{1}{2}$

$$=\frac{n}{n+1}\alpha+\frac{a}{2(n+1)}=\frac{n}{n+1}a^{-\frac{1}{n}}+\frac{a}{2(n+1)}$$

(2)　$f'(a)=\dfrac{n}{n+1}\cdot\left(-\dfrac{1}{n}\right)a^{-\frac{1}{n}-1}+\dfrac{1}{2(n+1)}=-\dfrac{1}{n+1}\left(a^{-\frac{n+1}{n}}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{a^{\frac{n+1}{n}}-2}{2a^{\frac{n+1}{n}}}$

$f'(a)=0$ とすると，$a^{\frac{n+1}{n}}=2$，$a=2^{\frac{n}{n+1}}$

右表より，$a=2^{\frac{n}{n+1}}$ のとき $f(a)$ は最小値をとるので，

a	1	$\cdots$	$2^{\frac{n}{n+1}}$	$\cdots$
$f'(a)$		$-$	0	$+$
$f(a)$		↘		↗

$$b_n=f\left(2^{\frac{n}{n+1}}\right)=\frac{n}{n+1}\left(2^{\frac{n}{n+1}}\right)^{-\frac{1}{n}}+\frac{1}{2(n+1)}\cdot 2^{\frac{n}{n+1}}$$

$$=\frac{n}{n+1}\cdot 2^{-\frac{1}{n+1}}+\frac{1}{n+1}\cdot 2^{\frac{n}{n+1}-1}=\frac{n}{n+1}\cdot 2^{-\frac{1}{n+1}}+\frac{1}{n+1}\cdot 2^{-\frac{1}{n+1}}=2^{-\frac{1}{n+1}}$$

(3)　$c_m=b_m\cdot b_{m+1}\cdot\cdots\cdot b_{2m}=2^{-\frac{1}{m+1}}\cdot 2^{-\frac{1}{m+2}}\cdot\cdots\cdot 2^{-\frac{1}{2m+1}}=2^{-\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{2m+1}\right)}$

ここで，$d_m=\dfrac{1}{m+1}+\dfrac{1}{m+2}+\cdots+\dfrac{1}{2m}+\dfrac{1}{2m+1}$ とおくと，

$$d_m=\frac{1}{m}\left(\frac{m}{m+1}+\frac{m}{m+2}+\cdots+\frac{m}{2m}\right)+\frac{1}{2m+1}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{1+\frac{k}{m}}+\frac{1}{2m+1}$$

$$\lim_{m\to\infty}d_m=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\Big[\log|1+x|\Big]_0^1=\log 2$$

したがって，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}c_m=\lim_{m\to\infty}2^{-d_m}=2^{-\log 2}$

［解 説］

計算力の問われる問題です。$f'(a)$ の符号変化については，特に慎重さが要求されます。それに比べると，(3)での区分求積法を利用した極限計算は，簡単です。

4

問題のページへ

(1)　$A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$ に対して，ハミルトン・ケーリーの定理を適用すると，

$A^2+A+E=O$（E は単位行列）

$(A-E)(A^2+A+E)=O$ より，$A^3-E=O$，$A^3=E$ となるので，

(i)　n が 3 で割り切れるとき　$A^n=E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

(ii)　n を 3 で割った余りが 1 のとき　$A^n=A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$

(iii) n を 3 で割った余りが 2 のとき　$A^n=A^2=-A-E=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}$

(2)　$A^2B=BA$ より，$\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$

$-a+c=b$ ……①，$-b+d=-a-b$ ……②

$-a=d$ ……③，$-b=-c-d$ ……④

②③より $d=-a$ となり, $a\geqq 0$, $d\geqq 0$ より $a=d=0$

①④より $c=b$ となるので，まとめると $B=\begin{pmatrix}0&b\\b&0\end{pmatrix}$ である。

条件より，$B^2=E$ なので，$\begin{pmatrix}0&b\\b&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&b\\b&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

これより $b^2=1$ となり, $b\geqq 0$ から $b=1$

以上より，$B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

(3)　(1)より，$A^{25}=A^{3\times 8+1}=A$，$A^{1999}=A^{3\times 666+1}=A$

(2)より，$BA^2BA^{25}BA^{1999}=BA^2BABA=B\cdot BA\cdot ABA=B^2A^2BA$

$=A^2BA=BA\cdot A=BA^2$

$=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\-1&1\end{pmatrix}$

［解 説］

(1)はノーヒントで A^n を求めるわけですから, A には特別な仕掛けがあるはずです。それは $A^3=E$ ということで，それさえわかれば，後は完答まで一直線です。