1

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　点$(1,\ 0)$を通って傾きが-4の直線と，関数$y=x^2-4x$のグラフとの共有点の座標を求めよ。

(2)　2 つの関数$y=x^2-4x$，$y=k(x-a)$のグラフが，どんな k の値に対しても$-2\leqq x\leqq 2$の範囲で少なくとも 1 つの共有点をもつようなaの値の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

三角形 ABC において $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\vec{b}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 実数 s，t が $0\leqq s+t\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ の範囲を動くとき，次の各条件を満たす点 P の存在する範囲をそれぞれ図示せよ。

(a) $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=s\vec{a}+t(\vec{a}+\vec{b})$

(b) $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(2s+t)\vec{a}+(s-t)\vec{b}$

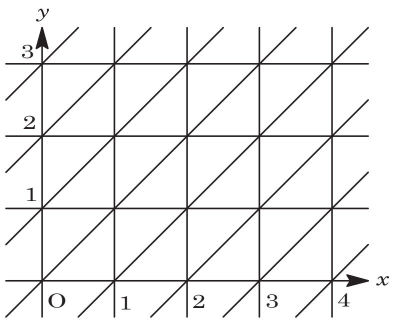
(2) (1)の各場合に，点 P の存在する範囲の面積は三角形 ABC の面積の何倍か。

3

解答解説のページへ

xy 平面全体が右図のような直線の配列で埋められているとする。

このとき，点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$ と $\mathrm{P}\left(m+\dfrac{2}{3},\ n+\dfrac{1}{3}\right)$ について，A から P に至るのに横切らなければならない直線の本数の最小値を m と n を用いて表せ。ただし，m, n は負でない整数であるとする。



1

問題のページへ

(1)　点$(1,\ 0)$を通って傾きが-4の直線は，$y=-4(x-1)$ ………①

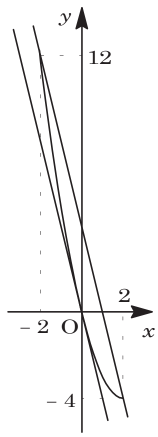
①と$y=x^2-4x$ ……②の共有点は，

$$-4(x-1)=x^2-4x,\ x^2-4=0,\ x=\pm 2$$

$x=2$のとき，①より$y=-4$なので，共有点$(2,\ -4)$

$x=-2$のとき，①より$y=12$なので，共有点$(-2,\ 12)$

(2)　②より，$y=(x-2)^2-4$となり，$-2\leqq x\leqq 2$の範囲でグラフを書くと，右図の曲線のようになる。



また，$y=k(x-a)$は点$(a,\ 0)$を通って傾きがkの直線を表し，$k=-4$，$a=1$のとき，(1)より②と$(2,\ -4)$，$(-2,\ 12)$で交わる。

よって，$a=1$のときは，右図より，どんなkの値に対しても$-2\leqq x\leqq 2$の範囲で少なくとも1つの共有点をもつ。

また，②より$y'=2x-4$なので，$x=0$で$y'=-4$から原点における②の接線は$y=-4x$となる。そして，$a=0$のときは，どんなkの値に対しても原点が共有点となる。

さて，$a<0$, $1<a$のときは，$k=-4$とすると$-2\leqq x\leqq 2$の範囲で共有点をもたない。

さらに，$0<a<1$のとき，$k\leqq -4$では$a<x<2$で，$k\geqq -4$では$-2<x<a$で少なくとも1つの共有点をもつ。

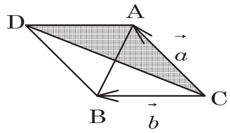
以上より，どんなkの値に対しても$-2\leqq x\leqq 2$の範囲で少なくとも1つの共有点をもつ条件は，$0\leqq a\leqq 1$である。

［解 説］

(2)は最初，yを消去して方程式の解の配置で考えました。しかし，かなり複雑なので，方針を変更してグラフを書くと，(1)が大きなヒントとなっていることがわかりました。

2

問題のページへ



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = s\vec{a} + t(\vec{a} + \vec{b})$ ……(a)に対し，$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \vec{a} + \vec{b}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = s\overrightarrow{\mathrm{CA}} + t\overrightarrow{\mathrm{CD}} \quad (0 \leqq s + t \leqq 1,\ s \geqq 0,\ t \geqq 0)$$

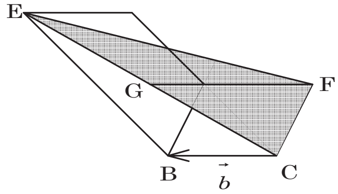
よって，点 P は△ADC の内部または周上に存在する。

次に，$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = (2s + t)\vec{a} + (s - t)\vec{b}$ ……(b)に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = s(2\vec{a} + \vec{b}) + t(\vec{a} - \vec{b})$$

$\overrightarrow{\mathrm{CE}} = 2\vec{a} + \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{CF}} = \vec{a} - \vec{b}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = s\overrightarrow{\mathrm{CE}} + t\overrightarrow{\mathrm{CF}} \quad (0 \leqq s + t \leqq 1,\ s \geqq 0,\ t \geqq 0)$$



よって，点 P は△CEF の内部または周上に存在する。

(2)　(a)の場合は，△ADC = △ABC より，点 P の存在する範囲の面積は△ABC の 1 倍となる。

(b)の場合は，$\mathrm{GF} = \dfrac{3}{2}\mathrm{AF} = \dfrac{3}{2}\mathrm{BC}$，$\mathrm{EB} = 2\mathrm{AC}$ より，

$$\triangle\mathrm{EFC} = \left(\frac{3}{2} \times 2\right)\triangle\mathrm{ACF} = 3\triangle\mathrm{ABC}$$

よって，点 P の存在する範囲の面積は△ABC の 3 倍となる。

［解 説］

一般的に難しめの問題が多いベクトルと領域の融合題ですが，本問は基本の確認が主となっています。

3

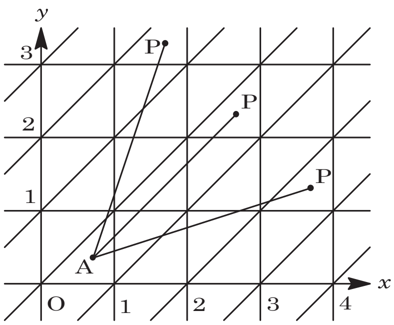
問題のページへ

点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$ から点 $\mathrm{P}\left(m+\dfrac{2}{3},\ n+\dfrac{1}{3}\right)$ に至るのに横切らなければならない直線の本数の最小値は，線分 AP が横切る直線の本数に等しい。

まず，線分 AP は y 軸に平行な直線を m 本横切り，x 軸に平行な直線を n 本横切る。

また，$y=x$ に平行な直線については，m と n の大小関係によって横切る直線の本数が決まる。

そこで，$f(x,\ y)=y-x-k$ とし，条件を満たす整数 k の個数を求める。



(i)　$m=n$ のとき

線分 AP は，$y=x$ に平行な直線を横切らないので，求める直線の本数は $m+n$ となる。

(ii)　$m<n$ のとき

$f\left(m+\dfrac{2}{3},\ n+\dfrac{1}{3}\right)>0$ かつ $f\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)<0$ となるので，

$$n+\frac{1}{3}-m-\frac{2}{3}-k>0,\ \ \frac{1}{3}-\frac{2}{3}-k<0$$

よって $-\dfrac{1}{3}<k<n-m-\dfrac{1}{3}$ となり，これを満たす整数 k は $k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-m-1$ なので，$n-m$ 個存在する。

すなわち，線分 AP は，$n-m$ 本の $y=x$ に平行な直線を横切ることより，求める直線の本数は $m+n+n-m=2n$ となる。

(iii) $m>n$ のとき

$f\left(m+\dfrac{2}{3},\ n+\dfrac{1}{3}\right)<0$ かつ $f\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)>0$ から，$n-m-\dfrac{1}{3}<k<-\dfrac{1}{3}$ となり，これを満たす整数 k は $k=n-m,\ n-m+1,\ \cdots,\ -1$ なので，$m-n$ 個存在する。

すなわち，線分 AP は，$m-n$ 本の $y=x$ に平行な直線を横切るので，求める直線の本数は $m+n+m-n=2m$ となる。

［解 説］

どこまで論理をかけばよいのか迷ってしまう問題です。時間があれば丁寧に，なければ直観的に，というのが妥当な線でしょう。