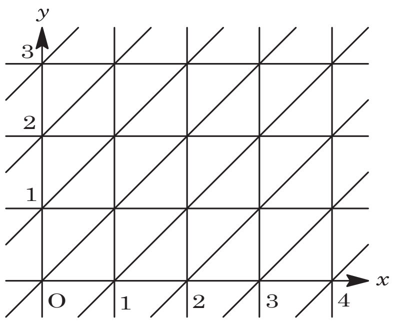
1

解答解説のページへ

xy 平面全体が右図のような直線の配列で埋められているとする。

このとき，点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$ と $\mathrm{P}\left(m+\dfrac{2}{3},\ n+\dfrac{1}{3}\right)$ について，A から P に至るのに横切らなければならない直線の本数の最小値を m と n を用いて表せ。ただし，m, n は負でない整数であるとする。



2

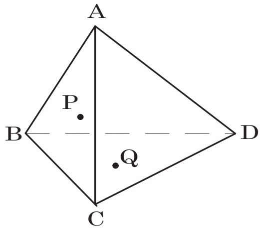
解答解説のページへ

　四面体 ABCD を考える。

　面 ABC 上の点 P と面 BCD 上の点 Q について,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}+u\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

とおくとき, $x:y=s:t$ ならば, 線分 AQ と DP が交わることを示せ。



3

解答解説のページへ

2 つの関数 $f(x)=x(1-x)$，$g(x)=\dfrac{2x}{2+x}$ を用いて，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$0<a_0=b_0<\frac{1}{2},\ a_{n+1}=f(a_n),\ b_{n+1}=g(b_n)\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

によって定める。次の問いに答えよ。

(1)　$0<x<\dfrac{1}{2}$ において，$f(x)$ は単調増加であることを示せ。また $x>0$ のとき，$f(x)<g(x)<x$ であることを示せ。

(2)　$n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して，$0<a_n<b_n<\dfrac{1}{2}$ であることを示せ。

(3)　b_n を求めよ。

4

解答解説のページへ

関数 $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{6-2\sin x}}$ を考える。$0\leqq x\leqq 2\pi$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の導関数を求めよ。

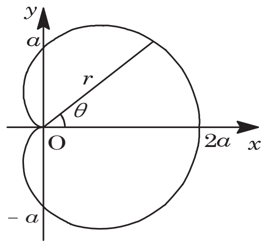
(2)　$f(x)$ の最小値を求めよ。またその最小値を与える x に対して，$\cos x$ の値を求めよ。

(3)　$y=f(x)$ のグラフの x 軸より下方にある部分と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。

$\boxed{5}$

解答解説のページへ

$a>0$ を定数として，極方程式 $r=a(1+\cos\theta)$ により表される曲線 C_a を考える。次の問いに答えよ。



(1) 極座標が $\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$ の点を中心とし半径が $\dfrac{a}{2}$ である円 S を，極方程式で表せ。

(2) 点 O と曲線 C_a 上の点 $\mathrm{P}\neq\mathrm{O}$ とを結ぶ直線が円 S と交わる点を Q とするとき，線分 PQ の長さは一定であることを示せ。

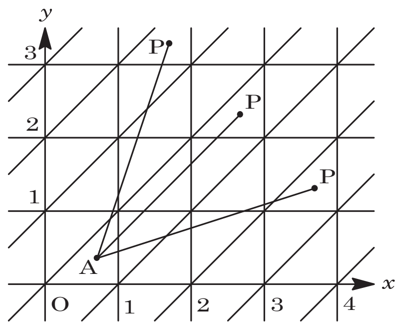
(3) 点 P が曲線 C_a 上を動くとき，極座標が $(2a,\ 0)$ の点と P との距離の最大値を求めよ。

1

問題のページへ

点A$\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$から点P$\left(m+\dfrac{2}{3},\ n+\dfrac{1}{3}\right)$に至るのに横切らなければならない直線の本数の最小値は，線分APが横切る直線の本数に等しい。

まず，線分APはy軸に平行な直線をm本横切り，x軸に平行な直線をn本横切る。



また，$y=x$に平行な直線については，mとnの大小関係によって横切る直線の本数が決まる。

そこで，$f(x,\ y)=y-x-k$とし，条件を満たす整数kの個数を求める。

(i)　$m=n$のとき

線分 AP は，$y=x$に平行な直線を横切らないので，求める直線の本数は$m+n$となる。

(ii)　$m<n$のとき

$f\left(m+\dfrac{2}{3},\ n+\dfrac{1}{3}\right)>0$かつ$f\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)<0$となるので，

$$n+\frac{1}{3}-m-\frac{2}{3}-k>0,\ \frac{1}{3}-\frac{2}{3}-k<0$$

よって$-\dfrac{1}{3}<k<n-m-\dfrac{1}{3}$となり，これを満たす整数 k は$k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-m-1$なので，$n-m$個存在する。

すなわち，線分 AP は，$n-m$本の$y=x$に平行な直線を横切ることより，求める直線の本数は$m+n+n-m=2n$となる。

(iii)　$m>n$のとき

$f\left(m+\dfrac{2}{3},\ n+\dfrac{1}{3}\right)<0$かつ$f\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)>0$から，$n-m-\dfrac{1}{3}<k<-\dfrac{1}{3}$となり，これを満たす整数$k$は$k=n-m,\ n-m+1,\ \cdots,\ -1$なので，$m-n$個存在する。

すなわち，線分 AP は，$m-n$本の$y=x$に平行な直線を横切るので，求める直線の本数は$m+n+m-n=2m$となる。

［解 説］

どこまで論理をかけばよいのか迷ってしまう問題です。時間があれば丁寧に，なければ直観的に，というのが妥当な線でしょう。

$\boxed{2}$ 問題のページへ

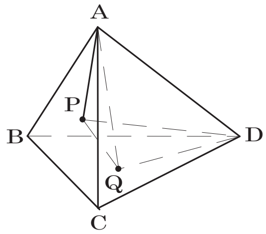
$x : y = s : t$ より，$(x,\ y) \neq (0,\ 0)$ のとき，$\dfrac{s}{x} = \dfrac{t}{y}$ と変形すると, $k>0$ として,

$$s = kx,\quad t = ky$$

すると，条件より,

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}} + u\overrightarrow{\mathrm{AD}} = k(x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}) + u\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}} + y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{AP}} + u\overrightarrow{\mathrm{AD}}$



よって, Q は 3 点 A, P, D で決まる平面上にあり，四角形 APQD の 2 本の対角線である線分 AQ と DP は交わる。

また，$x = 0$，$y \neq 0$ のとき，$s = 0$ となるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = y\overrightarrow{\mathrm{AC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = t\overrightarrow{\mathrm{AC}} + u\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

よって，P は辺 AC 上の点，Q は面 BCD と面 ACD の交線である辺 CD 上の点となり，線分 AQ と DP は面 ACD 上で交わる。

さらに，$y = 0$，$x \neq 0$ のとき，$t = 0$ となるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = x\overrightarrow{\mathrm{AB}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + u\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

よって，P は辺 AB 上の点，Q は面 BCD と面 ABD の交線である辺 BD 上の点となり，線分 AQ と DP は面 ABD 上で交わる。

なお，$(x,\ y) = (0,\ 0)$ のときは，点 P は点 A と一致し，任意の $(s,\ t)$ に対して線分 AQ と DP は点 A で交わる。

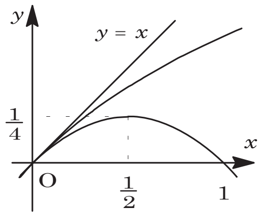
以上より，$x : y = s : t$ ならば，線分 AQ と DP は交わる。

[解 説]

$x : y = s : t$ という式を見たとき，場合分けをしようか，x, y の値が明らかに正としようか迷いました。前者の立場で解を作りましたが，後者でもよかったかもしれません。

$\boxed{3}$ 問題のページへ

(1) $f(x)=x(1-x)=-x^2+x$, $f'(x)=-2x+1$ なので, $0<x<\dfrac{1}{2}$ において, $f'(x)>0$ となり $f(x)$ は単調増加となる。



また, $g(x)=\dfrac{2x}{2+x}=2+\dfrac{-4}{x+2}$

ここで, $h(x)=x-g(x)=x-2+\dfrac{4}{x+2}$ とおくと,

$$h'(x)=1-\frac{4}{(x+2)^2}=\frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$$

$x>0$ のとき $h'(x)>0$ より, $h(x)>h(0)=0$

また, $k(x)=g(x)-f(x)=2+\dfrac{-4}{x+2}+x^2-x$ とおくと,

$$k'(x)=\frac{4}{(x+2)^2}+2x-1=\frac{4+(2x-1)(x+2)^2}{(x+2)^2}=\frac{2x^3+7x^2+4x}{(x+2)^2}$$

$x>0$ のとき $k'(x)>0$ より, $k(x)>k(0)=0$

以上より, $x>0$ のとき, $f(x)<g(x)<x$

(2) $n\geqq 1$ のとき, $0<a_n<b_n<\dfrac{1}{2}$ であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=1$ のとき　$0<a_0=b_0<\dfrac{1}{2}$ なので, (1)より $f(0)<f(a_0)=f(b_0)<g(b_0)$,

さらに, $x>0$ のとき $g(x)$ は単調増加なので, $g(b_0)<g\left(\dfrac{1}{2}\right)<\dfrac{1}{2}$ となる。

以上まとめて, $f(0)<f(a_0)<g(b_0)<\dfrac{1}{2}$ なので, $0<a_1<b_1<\dfrac{1}{2}$

(ii) $n=k$ のとき　$0<a_k<b_k<\dfrac{1}{2}$ と仮定して, (i)と同様にすると,

$f(0)<f(a_k)<f(b_k)<g(b_k)<g\left(\dfrac{1}{2}\right)<\dfrac{1}{2}$ より, $0<a_{k+1}<b_{k+1}<\dfrac{1}{2}$

(i)(ii)より, $n\geqq 1$ のとき, $0<a_n<b_n<\dfrac{1}{2}$

(3) $b_{n+1}=g(b_n)=\dfrac{2b_n}{2+b_n}$ で, (2)から $0<b_n$ なので, $\dfrac{1}{b_{n+1}}=\dfrac{2+b_n}{2b_n}=\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{1}{2}$

よって, $\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{1}{b_0}+\dfrac{1}{2}n=\dfrac{2+b_0n}{2b_0}$ より, $b_n=\dfrac{2b_0}{2+b_0n}$

［解 説］

(1)(2)の流れから, (3)は数列の極限かと思いましたが, はずれてしまいました。なお, (1)は上の解のように微分するまでもありませんでした。

4

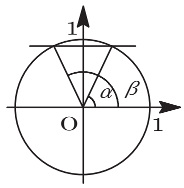
問題のページへ

(1)　$f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{6}-2\sin x}$ より，

$$f'(x)=\frac{-\sin x(\sqrt{6}-2\sin x)-\cos x(-2\cos x)}{(\sqrt{6}-2\sin x)^2}=\frac{2-\sqrt{6}\sin x}{(\sqrt{6}-2\sin x)^2}$$

(2)　$f'(x)=0$ とすると，$\sin x=\dfrac{2}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

この解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，$f(0)=f(2\pi)=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ なので，増減表より，$x=\beta$ のとき $f(x)$ は最小値をとる。



x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{6}}$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

このとき，$\sin\beta=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ なので，

$$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

よって，最小値は，

$$f(\beta)=\frac{\cos\beta}{\sqrt{6}-2\sin\beta}=\frac{-\sqrt{3}}{3\sqrt{6}-2\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(3)　$f(x)=0$ とすると，$x=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$ となる。求める面積を S とすると，

$$S=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{\cos x}{\sqrt{6}-2\sin x}dx=-\int_{1}^{-1}\frac{1}{\sqrt{6}-2t}dt\quad(\sin x=t\text{ とおく})$$

$$=\frac{1}{2}\Big[\log\left|\sqrt{6}-2t\right|\Big]_{1}^{-1}=\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2}$$

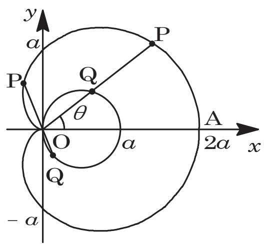
$$=\frac{1}{2}\log(5+2\sqrt{6})=\log(\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

［解 説］

数Ⅲ微積分の典型題です。極値をとる x の値が求まらないので，これを文字で設定し，その条件を用いて極値を求める問題です。

$\boxed{5}$

問題のページへ



(1)　原点と点$(a,\ 0)$を直径の両端とする円なので,

$$r = a\cos\theta$$

(2)　x軸に関する対称性より，$0 \leqq \theta \leqq \pi$で考える。

$$\mathrm{OP} = a(1+\cos\theta),\ \mathrm{OQ} = a\left|\cos\theta\right|$$

(i)　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$のとき

$$\mathrm{PQ} = \mathrm{OP} - \mathrm{OQ} = a(1+\cos\theta) - a\cos\theta = a$$

(ii)　$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$のとき

$$\mathrm{PQ} = \mathrm{OP} + \mathrm{OQ} = a(1+\cos\theta) - a\cos\theta = a$$

(3)　$\mathrm{A}(2a,\ 0)$とおき，$0 < \theta < \pi$のとき，$\triangle\mathrm{OAP}$に余弦定理を適用して,

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2 &= \mathrm{OP}^2 + \mathrm{OA}^2 - 2\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OA}\cos\theta = r^2 + 4a^2 - 2r\cdot 2a\cos\theta \\ &= a^2(1+\cos\theta)^2 + 4a^2 - 4a\cos\theta\cdot a(1+\cos\theta) \\ &= 5a^2 - 2a^2\cos\theta - 3a^2\cos^2\theta \\ &= -3a^2\left(\cos\theta + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{16}{3}a^2\end{aligned}$$

また，$\theta = 0$のとき$\mathrm{AP}^2 = 0$，$\theta = \pi$のとき$\mathrm{AP}^2 = 4a^2$となる。

よって，$\cos\theta = -\dfrac{1}{3}$のとき，$\mathrm{AP}^2$は最大値$\dfrac{16}{3}a^2$をとる。このとき AP は最大値$\dfrac{4}{\sqrt{3}}a$をとる。

［解 説］

有名は曲線カージオイドを題材とした問題です。なお，極方程式は $r<0$ の場合もあるので，注意しなくてはいけません。