1

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　複素数$1+i$および$1+\sqrt{3}i$を極形式で表せ。ただし，iは虚数単位である。

(2)　正の整数m，nが$|(1+i)^n|=|(1+\sqrt{3}i)^m|$を満たすとき，$m$，$n$の関係式を求めよ。

(3)　正の整数 m，n で$(1+i)^n=(1+\sqrt{3}i)^m$かつ$m+n \leqq 100$を満たす組$(m,\ n)$をすべて求めよ。

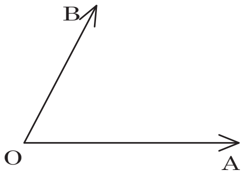
2

解答解説のページへ

3 点 O, A, B は，一直線上にない点とし，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおく。このとき次の問いに答えよ。

(1) 点 P を $\overrightarrow{\mathrm{BP}} = t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$（$t$ は実数）を満たす点とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t で表せ。

(2) 点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$（$s$ は実数）を満たす点とする。P と Q の中点を M とする。t，s が $0 \leqq t \leqq 1$，$0 \leqq s \leqq 1$ を満たしながら変化するとき，点 M の存在する範囲を図示せよ。



3

解答解説のページへ

a を正の定数として，関数 $f(x)=(x-1)\{4x^2-(6a-4)x+12a-11\}$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $f'(x)\geqq 0$ が区間 $0\leqq x\leqq 2$ で成り立つとき, a のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) (2)のとき，区間 $0\leqq x\leqq 2$ における $|f(x)|$ の最大値を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$1+i=\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$，$1+\sqrt{3}i = 2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$

(2)　(1)より，$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n\{\cos(45^\circ\times n) + i\sin(45^\circ\times n)\}$

$(1+\sqrt{3}i)^m = 2^m\{\cos(60^\circ\times m) + i\sin(60^\circ\times m)\}$

$|(1+i)^n| = |(1+\sqrt{3}i)^m|$なので，$(\sqrt{2})^n = 2^m$，$2^{\frac{n}{2}} = 2^m$

よって，$\dfrac{n}{2} = m$，$n = 2m$

(3)　条件より，$(1+i)^n = (1+\sqrt{3}i)^m$なので，

$|(1+i)^n| = |(1+\sqrt{3}i)^m|$ ………①，$\arg(1+i)^n = \arg(1+\sqrt{3}i)^m$ ………②

①より，(2)の結果を用いて，$n = 2m$ ………③

②より，kを整数として，$45^\circ\times n = 60^\circ\times m + 360^\circ\times k$

$3n = 4m + 24k$ ………④

③④より，$m = 12k$，$n = 24k$

ここで条件より，$m \geqq 1$，$n \geqq 1$，$m + n \leqq 100$なので，

$12k \geqq 1$，$24k \geqq 1$，$36k \leqq 100$

よって，$k = 1$，2となり，$(m,\ n) = (12,\ 24)$，$(24,\ 48)$

［解　説］

複素数の極形式についての基本問題です。非常にていねいな誘導がついています。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=t(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\vec{b}+t(2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{b})=\vec{b}+2t(\vec{a}+\vec{b})$$

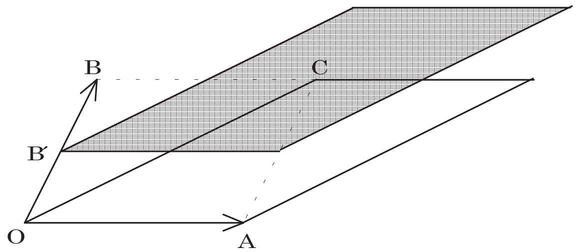
(2) PQ の中点が M より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})=\frac{1}{2}\{\vec{b}+2t(\vec{a}+\vec{b})+2s\vec{a}\}=\frac{1}{2}\vec{b}+t(\vec{a}+\vec{b})+s\vec{a}$$

ここで，$\frac{1}{2}\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$，$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

すると, $0\leqq t\leqq 1$, $0\leqq s\leqq 1$ より, 点 M は OA, OC を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の内部または辺上を $\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ の方向に平行移動した領域に存在する。図示すると右図の網点部となる。



［解 説］

神戸大頻出のベクトルと領域の融合問題です。本年度は，基本中の基本というレベルです。

3

問題のページへ

(1)　$f(x)=(x-1)\{4x^2-(6a-4)x+12a-11\}$より,

$$f'(x)=4x^2-(6a-4)x+12a-11+(x-1)\{8x-(6a-4)\}$$
$$=12x^2-12ax+18a-15$$

(2)　区間$0\leqq x\leqq 2$で$f'(x)\geqq 0$が成り立つ条件は, (1)より,

$$f'(x)=12\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-3a^2+18a-15\ (a>0)$$

(i)　$0<\dfrac{a}{2}\leqq 2\ (0<a\leqq 4)$のとき　$f'\left(\dfrac{a}{2}\right)=-3a^2+18a-15\geqq 0$より,

$a^2-6a+5\leqq 0$,　$1\leqq a\leqq 5$

$0<a\leqq 4$と合わせると,　$1\leqq a\leqq 4$

(ii)　$\dfrac{a}{2}>2\ (a>4)$のとき　$f'(2)=-6a+33\geqq 0$より,　$a\leqq\dfrac{11}{2}$

$a>4$と合わせると,　$4<a\leqq\dfrac{11}{2}$

(i)(ii)より, 求めるaの範囲は,　$1\leqq a\leqq\dfrac{11}{2}$

(3)　(2)より,　$1\leqq a\leqq\dfrac{11}{2}$のとき, 区間$0\leqq x\leqq 2$で$f(x)$は単調に増加する。

ここで,　$f(0)=-12a+11<0$,　$f(2)=13$なので, 区間 $0\leqq x\leqq 2$ における$|f(x)|$の最大値は,　$|f(0)|=-(-12a+11)=12a-11$または$|f(2)|=13$である。

(i)　$12a-11<13\ (1\leqq a<2)$のとき　最大値は,　$|f(2)|=13$

(ii)　$12a-11\geqq 13\ \left(2\leqq a\leqq\dfrac{11}{2}\right)$のとき　最大値は,　$|f(0)|=12a-11$

［解　説］

微分法についての基本問題です。(3)は$f(1)=0$に注目すると, グラフを書くまでもありません。