1

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$は，初項 a および公差 d が整数であるような等差数列であり，$8 \leqq a_2 \leqq 10$，$14 \leqq a_4 \leqq 16$，$19 \leqq a_5 \leqq 21$を満たしている。このような数列$\{a_n\}$をすべて求めよ。

2

解答解説のページへ

実数 t に対して，xy 平面上の直線 $(1-t^2)x-2ty=1+t^2$ は，t の値によらずある円 C に接しているものとする。次の問いに答えよ。

(1) 円 C の方程式を求めよ。また，接点の座標を求めよ。

(2) t が $t \geqq 1$ の範囲を動くとき，直線の通過する範囲を図示せよ。

3

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $x^2+y^2+ax+by+3c=0$ が円を表すための $a,\ b,\ c$ の条件を求めよ。

(2)　1 つのサイコロを 2 回振って出た目の数を，順に a，b とする。$c=1$ とするとき，$a,\ b$ の組が(1)の条件を満たす場合は何通りあるか。

(3)　1 つのサイコロを 3 回振って出た目の数を，順に $a,\ b,\ c$ とする。$a,\ b,\ c$ が(1)の条件を満たす確率を求めよ。

1

問題のページへ

初項 a, 公差 d の等差数列の一般項は，$a_n = a + (n-1)d$ なので，条件より，

$$8 \leqq a + d \leqq 10 \cdots\cdots ①,\ 14 \leqq a + 3d \leqq 16 \cdots\cdots ②,\ 19 \leqq a + 4d \leqq 21 \cdots\cdots ③$$

①より, a と d が整数なので，$a + d = 8,\ 9,\ 10$

②より，$14 - (a+d) \leqq 2d \leqq 16 - (a+d) \cdots\cdots\cdots ②'$

③より，$19 - (a+d) \leqq 3d \leqq 21 - (a+d) \cdots\cdots\cdots ③'$

(i)　$a + d = 8$ のとき

②$'$ より $6 \leqq 2d \leqq 8$，③$'$ より $11 \leqq 3d \leqq 13$

よって，$d = 4$，$a = 8 - 4 = 4$ より，$a_n = 4 + 4(n-1) = 4n$

(ii)　$a + d = 9$ のとき

②$'$ より $5 \leqq 2d \leqq 7$，③$'$ より $10 \leqq 3d \leqq 12$

これを満たす整数 d は存在しない。

(iii)　$a + d = 10$ のとき

②$'$ より $4 \leqq 2d \leqq 6$，③$'$ より $9 \leqq 3d \leqq 11$

よって，$d = 3$，$a = 10 - 3 = 7$ より，$a_n = 7 + 3(n-1) = 3n + 4$

(i)(ii)(iii)より，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n = 4n$，$a_n = 3n + 4$

［解 説］

ad 平面を設定して①②③を図示しようと思いましたが，繁雑な感じがしましたので，方向転換をしました。

2

問題のページへ

(1)　$(1-t^2)x-2ty=1+t^2$ ……①より，$(1-t^2)x-2ty-1-t^2=0$ ……①′

円 C の中心を $(a,\ b)$，半径を r とすると，①′が接することより，

$$\frac{|(1-t^2)a-2tb-1-t^2|}{\sqrt{(1-t^2)^2+4t^2}}=r,\quad \frac{|(-a-1)t^2-2bt+a-1|}{\sqrt{1+2t^2+t^4}}=r$$

$$(-a-1)t^2-2bt+a-1=\pm r(1+t^2) \cdots\cdots\cdots ②$$

②がどんな t に対しても成立する条件は,

$$-a-1=\pm r,\ -2b=0,\ a-1=\pm r$$

これより，$-a-1=a-1$ から $a=0$，また $b=0$ となり, $r>0$ から $r=1$ である。

よって，円 C の方程式は，$x^2+y^2=1$ である。

すると，①を $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}x+\dfrac{-2t}{1+t^2}y=1$ と変形すると，接点の座標は $\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \dfrac{-2t}{1+t^2}\right)$

となる。

(2)　接点を $(x,\ y)$ とおくと, (1)より $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ ……③，$y=\dfrac{-2t}{1+t^2}$ ……④

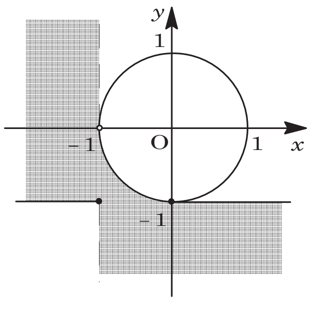
③より，$x=-1+\dfrac{2}{1+t^2}$ となり, $t\geqq 1$ で $0<\dfrac{2}{1+t^2}\leqq 1$ より，$-1<x\leqq 0$ となる。

④より，$y=\dfrac{-2}{\frac{1}{t}+t}$ となり，$t\geqq 1$ で $t+\dfrac{1}{t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}=2$

（等号は $t=1$ のとき）より，$-1\leqq y<0$ である。

よって，接点は円 C 上の $-1<x\leqq 0$，$-1\leqq y<0$ の部分にある。

以上より，直線①の通過領域は右図の網点部となる。なお, 実線の境界は含み，破線の境界は含まない。



［解　説］

直線の通過領域を求める有名問題です。(1)の誘導があるために, (2)はずいぶん解きやすくなっています。

3

問題のページへ

(1)　$x^2+y^2+ax+by+3c=0$ より，$\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{b}{2}\right)^2=\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}-3c$

円を表す条件は，$\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}-3c>0$ より，$a^2+b^2>12c$

(2)　a^2，b^2 の値と a^2+b^2 の値をまとめると右表のようになる。

$c=1$ のとき, (1)より $a^2+b^2>12$ となり，これを満たすのは 30 通りである。

	1	4	9	16	25	36
1	2	5	10	17	26	37
4	5	8	13	20	29	40
9	10	13	18	25	34	45
16	17	20	25	32	41	52
25	26	29	34	41	50	61
36	37	40	45	52	61	72

(3)　$c=2$ のとき $a^2+b^2>24$ から 23 通り，$c=3$ のとき $a^2+b^2>36$ から 14 通り，$c=4$ のとき $a^2+b^2>48$ から 6 通り，$c=5$ のとき $a^2+b^2>60$ から 3 通り，$c=6$ のとき $a^2+b^2>72$ から 0 通りである。

すると, (2)と合わせて，$30+23+14+6+3+0=76$ 通り

よって, a, b, c のすべての組は 6^3 通りなので，求める確率は $\dfrac{76}{6^3}=\dfrac{19}{54}$ である。

［解 説］

(2)では，最初 $a^2+b^2\leqq 12$ の場合を数えて答を導きました。ところが，(3)の設問を見ると，表を作った方がよいことがわかりました。