1

解答解説のページへ

0 でない複素数 z に対して，$w=u+iv$ を $w=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$ とするとき，次の問いに答えよ。ただし，$u,\ v$ は実数，i は虚数単位である。

(1)　複素数平面上で，z が単位円 $|z|=1$ 上を動くとき，w はどのような曲線を描くか。$u,\ v$ が満たす曲線の方程式を求め，その曲線を図示せよ。

(2)　複素数平面上で，z が実軸からの偏角 α $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の半直線上を動くとき，w はどのような曲線を描くか。u，v が満たす曲線の方程式を求め，その曲線を図示せよ。

2

解答解説のページへ

正の整数 n に対して，連立不等式 $0<x\leqq n$，$x\leqq y\leqq 3x$ の表す領域を D_n とする。次の問いに答えよ。

(1) 領域 D_n 内にある格子点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の個数を S_n とする。S_n を n で表せ。ただし，格子点とは x 座標と y 座標の両方が整数であるような点のことである。

(2) 原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を始点とし，領域 D_n 内の格子点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を終点とする位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は，ベクトル $\overrightarrow{v_1}=(1,\ 1)$，$\overrightarrow{v_2}=(1,\ 2)$，$\overrightarrow{v_3}=(1,\ 3)$ と 0 以上の整数 m_1，m_2，m_3 を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m_1\overrightarrow{v_1}+m_2\overrightarrow{v_2}+m_3\overrightarrow{v_3}$ と表せることを証明せよ。

3

解答解説のページへ

正の実数 a, b に対して，2 つの曲線 $C_1 : ay^2 = x^3$ $(x \geqq 0,\ y \geqq 0)$，$C_2 : bx^2 = y^3$ $(x \geqq 0,\ y \geqq 0)$ の原点 O 以外の交点を P とする。次の問いに答えよ。

(1) 交点 P の座標を求め, 2 つの曲線 C_1，C_2 の概形を描け。

(2) 2 つの曲線 C_1，C_2 で囲まれる部分の面積を a と b で表せ。また，この面積が一定値 S であるように a, b が動くとき，点 P の軌跡の方程式を求めよ。

4

解答解説のページへ

関数$f(x)$は任意の実数xに対して定義されているとする。次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$が$x=a$において微分可能であることの定義を述べよ。

(2)　次の 2 つの命題のうち正しいものを選び，それが正しい理由を示せ。

(i)　$f(x)$が$x=a$において連続ならば，必ず，$f(x)$は$x=a$において微分可能である。

(ii)　$f(x)$が$x=a$において連続であっても，$f(x)$は$x=a$において微分可能であるとは限らない。

(3)　関数$f(x)=\cos x$が$x=a$において微分可能であることを，(1)で答えた定義を用いて証明せよ。

5

解答解説のページへ

数字 1, 2, …, N の書かれたカードが 1 枚ずつ N 枚入っている箱から, 元に戻さずに 1 枚ずつ k 枚のカードを引く試行を考える。ここで, $2 \leqq k \leqq N$ とする。引いたカードの順に, 書かれている数字を x_1, x_2, …, x_k とする。次の問いに答えよ。

(1) $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$, すなわち k 枚のカードを数字の小さい順に引く確率 p を求めよ。

(2) i は整数で, $2 \leqq i \leqq k$ を満たすとする。$x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1}$, $x_{i-1} > x_i$ である確率, すなわち k 枚のカードのうち $i-1$ 枚目までは小さい順にカードを引き, i 枚目に初めて $i-1$ 枚目よりも数字の小さいカードを引く確率 q_i を求めよ。

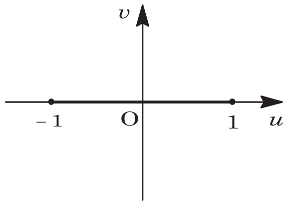
(3) N は 5 以上の整数で, $k=5$ とする。$2 \leqq i \leqq 5$ を満たす各整数 i について上の(2)の事象が起こるとき, 得点 i 点が与えられるとする。それ以外のときの得点は 0 点とする。このとき, 得点の期待値を求めよ。

1

問題のページへ

(1) z が円 $|z|=1$ 上を動くので，θ を任意の実数として，$z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおく。

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\left(\cos\theta+i\sin\theta+\frac{1}{\cos\theta+i\sin\theta}\right)$$
$$=\frac{1}{2}(\cos\theta+i\sin\theta+\cos\theta-i\sin\theta)=\cos\theta$$



$w=u+iv$ より，$u=\cos\theta$，$v=0$

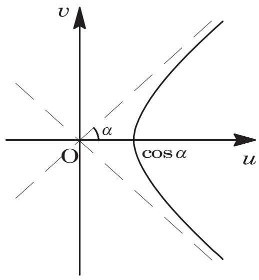
よって，$v=0\ (-1\leqq u\leqq 1)$

(2) z が実軸からの偏角 α の半直線上を動くので，
$z=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ とおく。ただし, $r>0$ である。

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2}\left\{r(\cos\alpha+i\sin\alpha)+\frac{1}{r(\cos\alpha+i\sin\alpha)}\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{r(\cos\alpha+i\sin\alpha)+\frac{1}{r}(\cos\alpha-i\sin\alpha)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\alpha+i\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\alpha\right\}$$

$w=u+iv$ より，$u=\dfrac{1}{2}\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\alpha$，$v=\dfrac{1}{2}\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\alpha$ となり，

$$\left(\frac{u}{\cos\alpha}\right)^2-\left(\frac{v}{\sin\alpha}\right)^2=\frac{1}{4}\left(r+\frac{1}{r}\right)^2-\frac{1}{4}\left(r-\frac{1}{r}\right)^2$$
$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha}-\frac{v^2}{\sin^2\alpha}=1$$



漸近線は，$v=\pm\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}u=\pm\tan\alpha\cdot u$ である。

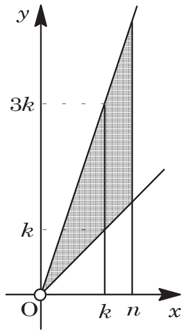
なお，$r>0$ より $\dfrac{u}{\cos\alpha}=\dfrac{1}{2}\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\geqq\sqrt{r\cdot\dfrac{1}{r}}=1$，また
$\dfrac{v}{\sin\alpha}=\dfrac{1}{2}\left(r-\dfrac{1}{r}\right)$ より v は任意の値をとる。

［解 説］

(2)では，双曲線のパラメータ表示が導けますが，このことに気付かずに r を消去しようとすると複雑です。

2

問題のページへ



(1)　領域 D_n 内において，$x=k\ (1\leqq k\leqq n)$ 上の格子点の個数は，

$3k-k+1=2k+1$ なので，D_n 内にある格子点の総数は，

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1)=2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n=n(n+2)$$

(2)　領域 D_n 内における $x=k\ (1\leqq k\leqq n)$ 上の格子点について，

題意の成立することを，数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$k=1$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3)$ である。

このとき，この $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は，それぞれ $(1,\ 1)=1\cdot\overrightarrow{v_1}+0\cdot\overrightarrow{v_2}+0\cdot\overrightarrow{v_3}$，$(1,\ 2)=0\cdot\overrightarrow{v_1}+1\cdot\overrightarrow{v_2}+0\cdot\overrightarrow{v_3}$，$(1,\ 3)=0\cdot\overrightarrow{v_1}+0\cdot\overrightarrow{v_2}+1\cdot\overrightarrow{v_3}$ と表すことができる。

(ii)　$k=l$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(l,\ l),\ (l,\ l+1),\ \cdots,\ (l,\ 3l)$ である。

ここで，この $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が，すべて $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m_1\overrightarrow{v_1}+m_2\overrightarrow{v_2}+m_3\overrightarrow{v_3}$ と表せると仮定する。ただし，m_1，m_2，m_3 は 0 以上の整数とする。

さて，$k=l+1$ のときは，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(l+1,\ l+1),\ (l+1,\ l+2),\ \cdots,\ (l+1,\ 3l+1)$，$(l+1,\ 3l+2)$，$(l+1,\ 3l+3)$ であるが，

$$(l+1,\ l+1)=(l,\ l)+\overrightarrow{v_1},\ (l+1,\ l+2)=(l,\ l+1)+\overrightarrow{v_1},\ \cdots,$$
$$(l+1,\ 3l+1)=(l,\ 3l)+\overrightarrow{v_1},\ (l+1,\ 3l+2)=(l,\ 3l)+\overrightarrow{v_2},$$
$$(l+1,\ 3l+3)=(l,\ 3l)+\overrightarrow{v_3}$$

これより，$k=l+1$ のときも，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m_1\overrightarrow{v_1}+m_2\overrightarrow{v_2}+m_3\overrightarrow{v_3}$ の形で表せる。

(i)(ii)より，領域 D_n 内における格子点 P は，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m_1\overrightarrow{v_1}+m_2\overrightarrow{v_2}+m_3\overrightarrow{v_3}$ と表せる。

［解 説］

(2)も(1)と同じように，直線 $x=k$ 上の格子点に注目して，証明をしてみました。

3

問題のページへ

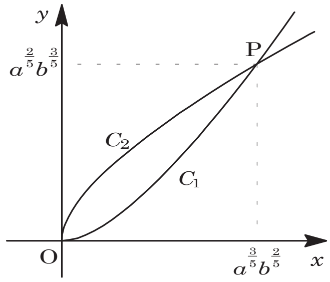
(1) 2 つの曲線 $C_1 : ay^2 = x^3$ $(x \geqq 0,\ y \geqq 0)$ ……①,

$C_2 : bx^2 = y^3$ $(x \geqq 0,\ y \geqq 0)$ ……②の交点は,

①×②より, $abx^2y^2 = x^3y^3$, $xy = ab$ ………③

③より $y = \dfrac{ab}{x}$, ①に代入して $a^3b^2 = x^5$

$$x = (a^3b^2)^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}},\quad y = \frac{ab}{a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}} = a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{3}{5}}$$



よって, $\mathrm{P}\left(a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}},\ a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{3}{5}}\right)$となる。

(2) ①より, $y = \sqrt{\dfrac{x^3}{a}} = a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}$, ②より, $y = \sqrt[3]{bx^2} = b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}$

①と②で囲まれる部分の面積は,

$$\int_0^{a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}} \left(b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}} - a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}\right)dx = \left[\frac{3}{5}b^{\frac{1}{3}}x^{\frac{5}{3}} - \frac{2}{5}a^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^{a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}}$$

$$= \frac{3}{5}b^{\frac{1}{3}}\left(a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{5}{3}} - \frac{2}{5}a^{-\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{3}{5}ab - \frac{2}{5}ab = \frac{1}{5}ab$$

また, 条件より, $\dfrac{1}{5}ab = S$ より, $ab = 5S$

ここで, $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと, ③より $xy = 5S$ である。

よって, 点 P の軌跡の方程式は, $xy = 5S$ となる。

[解 説]

見た目はすごいのですが, 内容は基本的です。ただ, (1)の曲線の概形については, 微分をして, もっと丁寧に書いた方がよいかもしれません。

4

問題のページへ

(1)　$f(x)$が$x=a$において微分可能であるのは，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$が存在することである。

(2)　正しい命題は(ii)である。

たとえば，$f(x)=|x-a|$に対して，$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}|x-a|=0$であり，また$f(a)=0$なので，$\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$となる。すなわち$f(x)$は$x=a$において連続となっているが,

$$\lim_{x\to a-0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-0}\frac{|x-a|-0}{x-a}=\lim_{x\to a-0}\frac{-(x-a)}{x-a}=-1$$

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+0}\frac{|x-a|-0}{x-a}=\lim_{x\to a+0}\frac{x-a}{x-a}=1$$

これより，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$は存在しないので，$f(x)$は$x=a$において微分可能ではない。

(3)　$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{-2\sin\frac{x+a}{2}\sin\frac{x-a}{2}}{x-a}$$

$$=-\lim_{x\to a}\sin\frac{x+a}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}=-\sin\frac{a+a}{2}\cdot 1=-\sin a$$

したがって，$f(x)=\cos x$は$x=a$において微分可能である。

［解 説］

微分の定義の確認問題です。(2)の例として，いちばん親しんでいるのは，上の関数でしょう。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k)$の数字の組は，${}_N\mathrm{P}_k$通りある。

この中で$x_1<x_2<\cdots<x_k$を満たすのは，N枚からk枚をとり，書かれている数字を小さい順に$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k$を対応させればよい。このとき，場合の数は${}_N\mathrm{C}_k$通りとなり，その確率は，

$$p=\frac{{}_N\mathrm{C}_k}{{}_N\mathrm{P}_k}=\frac{{}_N\mathrm{P}_k}{k!}\cdot\frac{1}{{}_N\mathrm{P}_k}=\frac{1}{k!}$$

(2)　$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_i)$の数字の組は，${}_N\mathrm{P}_i$通りある。

この中で$x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}$かつ$x_{i-1}>x_i$を満たすのは，N枚からi枚をとり，最大数以外の数字をx_iとし，それ以外の$i-1$枚の書かれている数字を小さい順に$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{i-1}$と対応させればよい。このとき，$x_i$のとり方が$i-1$通りなので，(1)と同様に考えて，その場合の数は${}_N\mathrm{C}_i\times(i-1)$通りとなる。

また，$(x_{i+1},\ \cdots,\ x_k)$の数字の組については任意であるので，

$$q_i=\frac{{}_N\mathrm{C}_i\times(i-1)}{{}_N\mathrm{P}_i}=\frac{i-1}{i!}$$

(3)　得点の期待値をEとすると，

$$E=\sum_{i=2}^{5}iq_i=\sum_{i=2}^{5}i\cdot\frac{i-1}{i!}=\sum_{i=2}^{5}\frac{1}{(i-2)!}=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{8}{3}$$

［解　説］

(1)は有名問題です。また(2)では，それにひとひねりが加えられています。