1

解答解説のページへ

複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(z_1)$，$\mathrm{B}(z_2)$，$\mathrm{C}(z_3)$ は正三角形の頂点であり，左まわり（反時計まわり）に並んでいるとする。次の問いに答えよ。

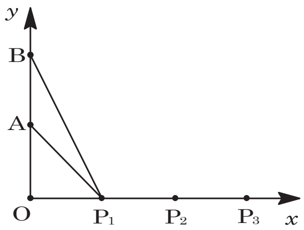
(1) 2 つの複素数 $\dfrac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$，$\dfrac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3}$ の値を求めよ。

(2) $z_1 = 2i$，$z_2 = -2 - 2\sqrt{2}i$ のとき，z_3 の値を求めよ。ただし，i は虚数単位とする。

2

解答解説のページへ

座標平面上に 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(0,\ 1)$，B$(0,\ 2)$ をとる。自然数 k に対し点 P_k の座標を $(k,\ 0)$ とする。自然数 n に対し，$2n$ 本の線分 AP_1，AP_2，…，AP_n，BP_1，BP_2，…，BP_n により分けられる第 1 象限の部分の個数を a_n とする。たとえば $n=1$ のとき，図のように第 1 象限が 3 つの部分に分けられるので $a_1=3$ である。次の問いに答えよ。



(1)　a_2，a_3 の値を求めよ。

(2)　a_{n+1} を a_n と n を用いて表し，その理由を述べよ。

(3)　a_n を n を用いて表せ。

3

解答解説のページへ

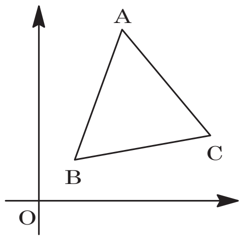
a は 1 より大きい定数とする。関数 $f(x)=(x+a)(x+1)(x-a)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ は $x=\alpha$ と $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$ で極値をとるとする。2 点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ と $(\beta,\ f(\beta))$ を結ぶ直線の傾きが，点 $(-1,\ 0)$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きと等しいとき, a の値を求めよ。

(2)　$f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とする。a が(1)で求めた値をとるとき，曲線 $y=f'(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　$A(z_1)$ のまわりに $C(z_3)$ を $-60°$ 回転すると，$B(z_2)$ に一致するので,

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\cos(-60°)+i\sin(-60°)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

また，$C(z_3)$ のまわりに $A(z_1)$ を $60°$ 回転すると，$B(z_2)$ に一致するので,

$$\frac{z_2-z_3}{z_1-z_3}=\cos 60°+i\sin 60°=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

(2)　$A(z_1)$ のまわりに $B(z_2)$ を $60°$ 回転すると，$C(z_3)$ に一致するので,

$$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad z_3=z_1+\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)(z_2-z_1)$$

よって，$z_3=2i+\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)\{-2-(2\sqrt{2}+2)i\}=2i-(1+\sqrt{3}i)\{1+(\sqrt{2}+1)i\}$

$$=(-1+\sqrt{3}+\sqrt{6})+(1-\sqrt{2}-\sqrt{3})i$$

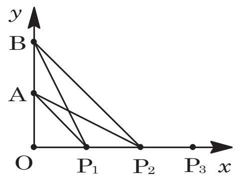
［解 説］

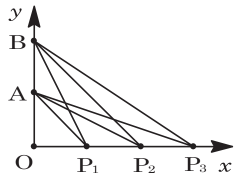
複素数平面上の回転に関する基本問題です。

© 電送数学舎 2003

2

問題のページへ





(1)　右図より，$a_2=a_1+2+1=6$

$a_3=a_2+3+1=10$

(2)　$2n$ 本の線分 AP_1，…，AP_n，BP_1，…，BP_n によって第 1 象限が a_n 個の部分に分けられているとする。

このとき，線分 AP_{n+1} を引くと，この線分は BP_1，BP_2，…，BP_n と 1 つずつ交点をもつことより，分けられた部分が $n+1$ 個増加する。さらに，線分 BP_{n+1} を引くと，この線分は他の線分と交点をもたないことから，分けられた部分は 1 個だけ増加する。よって，分けられた部分は，合わせて $n+2$ 個増加することより，

$a_{n+1}=a_n+n+2$

(3)　(2)より，$n\geqq 2$ で，$a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}(k+2)=3+\frac{1}{2}(n-1)n+2(n-1)=\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1$

$n=1$ をあてはめると，$a_1=3$ となり成立するので，

$a_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1$

［解 説］

分割される平面の個数についての頻出問題です。交点の個数に注目するのがポイントです。

© 電送数学舎 2003

3

問題のページへ

(1)　$f(x)=(x+a)(x+1)(x-a)=x^3+x^2-a^2x-a^2$ より，$f'(x)=3x^2+2x-a^2$

条件から，$f'(x)=0$ は 2 つの実数解 $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ をもつので，

$$\alpha+\beta=-\frac{2}{3},\quad \alpha\beta=-\frac{a^2}{3}\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで, 2 点 $(\alpha,\ f(\alpha))$，$(\beta,\ f(\beta))$ を結ぶ線分の傾きは,

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{(\beta^3+\beta^2-a^2\beta-a^2)-(\alpha^3+\alpha^2-a^2\alpha-a^2)}{\beta-\alpha}$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)-(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)-a^2(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}$$

$$=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta+\alpha+\beta-a^2\ \cdots\cdots\cdots②$$

また，点 $(-1,\ 0)$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の傾き $f'(-1)=1-a^2$ は，条件より，②と等しいので,

$$(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta+\alpha+\beta-a^2=1-a^2$$

①より，$\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{3}a^2-\dfrac{2}{3}=1$，$\dfrac{1}{3}a^2=\dfrac{11}{9}$，$a^2=\dfrac{11}{3}$

$a>1$ より，$a=\sqrt{\dfrac{11}{3}}=\dfrac{\sqrt{33}}{3}$

(2)　$f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$ より,

$$S=-\int_\alpha^\beta f'(x)\,dx=-3\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-3\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{2}\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}+\frac{4}{3}\cdot\frac{11}{3}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{48}{9}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{32\sqrt{3}}{9}$$

[解　説]

微積分の基本問題です。複雑な計算も必要ありません。

© 電送数学舎 2003