1

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。ただし，i は虚数単位とする。

(1)　複素数 z に対し，$w=\dfrac{z-i}{z+i}$ とする。z が実軸上を動くとき，複素数平面上で w を表す点が描く図形を求めよ。

(2)　複素数 z とその共役複素数 $\overline{z}$ に対し，$w_1=\dfrac{z-i}{z+i}$，$w_2=\dfrac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}$ とする。$z\neq\pm i$ のとき，複素数平面上で w_1 を表す点を P，w_2 を表す点を Q とする。P，Q と原点 O が同一直線上にあることを示せ。

2

解答解説のページへ

三角形 ABC があり，$AB=2$，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{4}$，$\angle CAB>\dfrac{\pi}{4}$ とする。点 A から辺 BC に下ろした垂線の足を H とし，$\angle CAH=\alpha$ とする。辺 AB の中点を M とする。線分 AM 上に A と異なる点 X をとる。3 点 A, X, H を通る円の中心を P，半径を r，$\angle PAH=\theta$ とする。この円と直線 AC との交点で，A と異なる点を Y とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\cos\theta$ を r を用いて表せ。

(2)　$AX+AY$ を r と α を用いて表せ。

(3)　X のとり方によらず，$AX+AY$ がつねに一定の値になるときの α の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

関数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{4}|x|}}{x^2-3x+18}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の極小値をすべて求めよ。

(2)　$f(x)$ の最小値を求めよ。ただし，必要ならば $e>2.7$ を用いてよい。

4

解答解説のページへ

$f(x)$は実数全体で定義された何回でも微分可能な関数で，$f(0)=0$，$f(\pi)=0$を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx=-\int_0^\pi f''(x)\sin x\,dx$を示せ。

(2) $f(x)=x(x-\pi)$のとき，実数 a に対し，$F(a)=\displaystyle\int_0^\pi \{af(x)-\sin x\}^2\,dx$とする。$a$を変化させたとき，$F(a)$を最小にする$a$の値を求めよ。

5

解答解説のページへ

座標平面上の点$(p,\ q)$で，p と q がともに整数であるものを格子点という。次の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対し，$p+2q=n$，$p>0$，$q>0$ を満たす格子点$(p,\ q)$の個数をa_nとする。a_nを求めよ。

(2) 自然数 n に対し，$p+2q<n$，$p>0$，$q>0$ を満たす格子点$(p,\ q)$の個数をb_nとする。b_nを求めよ。

(3) 極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}$と$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2}$を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$w=\dfrac{z-i}{z+i}$ より，$w(z+i)=z-i$，$(w-1)z=-i(w+1)$

ここで，$w=1$ とすると成立しないので $w\neq 1$ から，$z=\dfrac{-i(w+1)}{w-1}$ ………①

条件より, z は実数なので，$z=\overline{z}$ ………②

①②より，$\dfrac{-i(w+1)}{w-1}=\dfrac{i(\overline{w}+1)}{\overline{w}-1}$，$-(w+1)(\overline{w}-1)=(\overline{w}+1)(w-1)$

$2w\overline{w}=2$，$|w|=1$

よって，点 w は原点を中心とする半径 1 の円を描く。ただし，点 1 は除く。

(2)　$\dfrac{w_2}{w_1}=\dfrac{\overline{z}-i}{\overline{z}+i}\cdot\dfrac{z+i}{z-i}=\dfrac{z\overline{z}-i(z-\overline{z})+1}{z\overline{z}+i(z-\overline{z})+1}=\dfrac{|z|^2+1-i(z-\overline{z})}{|z|^2+1+i(z-\overline{z})}$

ここで，$\overline{i(z-\overline{z})}=-i(\overline{z}-z)=i(z-\overline{z})$ より，$i(z-\overline{z})$ は実数となる。

よって，$\dfrac{w_2}{w_1}$ は実数であり，この値を k とおくと $w_2=kw_1$ となることから，3 点 P, Q, O は同一直線上にある。

［解 説］

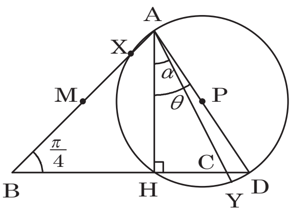
点 z が実軸上を動く条件を $|z+i|=|z-i|$ として数式化することもできますが，(2)との関連を考え，$z=\overline{z}$ を利用しました。

2

問題のページへ

(1)　まず，直線 BC と 3 点 A，X，H を通る円との交点を D とすると，$\angle\mathrm{AHD}=\dfrac{\pi}{2}$ より，AD は円の直径となり，

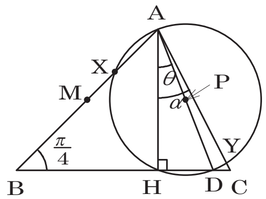
$\mathrm{AD}=2r$ である。



また，$\mathrm{AH}=\mathrm{AB}\sin\dfrac{\pi}{4}=2\sin\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}$ なので，

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AD}}=\frac{\sqrt{2}}{2r}$$

(2)　円の直径が AD より，$\angle\mathrm{AXD}=\dfrac{\pi}{2}$ となり，



$$\mathrm{AX}=\mathrm{AD}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=2r\left(\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$=\sqrt{2}r(\cos\theta-\sin\theta)$$

次に，$\angle\mathrm{AYD}=\dfrac{\pi}{2}$ より，$\alpha\leqq\theta$ のとき，

$$\mathrm{AY}=\mathrm{AD}\cos(\theta-\alpha)=2r(\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha)$$

また，$\alpha>\theta$ のときは，$\mathrm{AY}=\mathrm{AD}\cos(\alpha-\theta)$ となるが，$\cos(\alpha-\theta)=\cos(\theta-\alpha)$ より，$\alpha\leqq\theta$ のときと一致する。

ここで, (1)より，$\sin\theta=\sqrt{1-\dfrac{2}{4r^2}}=\dfrac{\sqrt{4r^2-2}}{2r}$ なので，

$$\mathrm{AX}+\mathrm{AY}=\sqrt{2}r\left(\frac{\sqrt{2}}{2r}-\frac{\sqrt{4r^2-2}}{2r}\right)+2r\left(\frac{\sqrt{2}}{2r}\cos\alpha+\frac{\sqrt{4r^2-2}}{2r}\sin\alpha\right)$$
$$=1-\sqrt{2r^2-1}+\sqrt{2}\cos\alpha+\sqrt{4r^2-2}\sin\alpha$$
$$=1+\sqrt{2}\cos\alpha+\sqrt{2r^2-1}(\sqrt{2}\sin\alpha-1)\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3)　$\mathrm{AX}+\mathrm{AY}$ が X の位置によらず一定である条件は，$(*)$が r の値によらず一定であることに等しいので，

$$\sqrt{2}\sin\alpha-1=0,\ \sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ である。

［解 説］

位置関係は少々複雑ですが，アバウトに考えても差し支えないように問題が構成されています。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　$x \geqq 0$ のとき，$f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{4}x}}{x^2-3x+18}$

$$f'(x)=\frac{(x^2-3x+18)-(8x-12)}{4(x^2-3x+18)^2}\cdot e^{\frac{1}{4}x}=\frac{(x-5)(x-6)}{4(x^2-3x+18)^2}\cdot e^{\frac{1}{4}x}$$

$x \leqq 0$ のとき，$f(x)=\dfrac{e^{-\frac{1}{4}x}}{x^2-3x+18}$

$$f'(x)=\frac{-(x^2-3x+18)-(8x-12)}{4(x^2-3x+18)^2}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}=\frac{-(x+2)(x+3)}{4(x^2-3x+18)^2}\cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

これより，$f(x)$ の増減をまとめると，右表のようになる。

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	5	$\cdots$	6	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\times$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

すると，極小値は3つ存在し，$f(-3)=\dfrac{e^{\frac{3}{4}}}{36}$，$f(0)=\dfrac{1}{18}$，$f(6)=\dfrac{e^{\frac{3}{2}}}{36}$ である。

(2)　まず，$\dfrac{3}{2}>\dfrac{3}{4}$ より，$\dfrac{e^{\frac{3}{2}}}{36}>\dfrac{e^{\frac{3}{4}}}{36}$ である。

次に，$e>2.7$ より，$e^3>(2.7)^3=19.683>2^4$ となり，$e^{\frac{3}{4}}>2$ である。これより，$\dfrac{e^{\frac{3}{4}}}{36}>\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$ である。

以上より，最小値は $f(0)=\dfrac{1}{18}$ である。

［解 説］

ミスが致命傷になる微分の計算問題です。

4

問題のページへ

(1)　$f(0)=f(\pi)=0$ を用いると，

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx=-\left[f(x)\cos x\right]_0^\pi+\int_0^\pi f'(x)\cos x\,dx$$

$$=0+\left[f'(x)\sin x\right]_0^\pi-\int_0^\pi f''(x)\sin x\,dx$$

$$=-\int_0^\pi f''(x)\sin x\,dx$$

(2)　$F(a)=\int_0^\pi\{af(x)-\sin x\}^2dx$ より，

$$F(a)=a^2\int_0^\pi\{f(x)\}^2dx-2a\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx+\int_0^\pi\sin^2x\,dx$$

ここで，$\int_0^\pi\{f(x)\}^2dx=\int_0^\pi x^2(x-\pi)^2dx=\int_0^\pi(x^4-2\pi x^3+\pi^2x^2)dx$

$$=\left[\frac{x^5}{5}-\pi\frac{x^4}{2}+\pi^2\frac{x^3}{3}\right]_0^\pi=\frac{\pi^5}{30}$$

また，$f(0)=f(\pi)=0$ で，$f''(x)=2$ より, (1)の結果を用いると，

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx=-\int_0^\pi 2\sin x\,dx=-4$$

よって，$F(a)=\frac{\pi^5}{30}a^2+8a+\int_0^\pi\sin^2x\,dx=\frac{\pi^5}{30}\left(a+\frac{120}{\pi^5}\right)^2-\frac{480}{\pi^5}+\int_0^\pi\sin^2x\,dx$

これより，$a=-\frac{120}{\pi^5}$ のとき，$F(a)$ は最小となる。

［解 説］

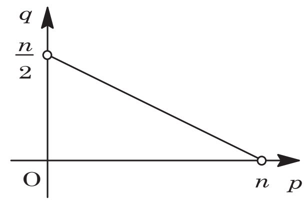
ミスが致命傷になる積分の計算問題です。

5

問題のページへ

(1)　$p=n-2q$ より，q が整数ならば p は整数となる。

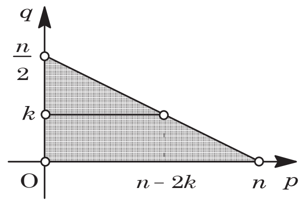
　すると，$p>0$，$q>0$ を満たす格子点$(p,\ q)$の個数を a_n とすると，



(i)　n が偶数のとき　$a_n=\dfrac{n}{2}-1$

(ii)　n が奇数のとき　$a_n=\dfrac{n-1}{2}$

(2)　$q=k$ 上の $p+2q<n$，$p>0$，$q>0$ を満たす格子点は $n-2k-1$ 個あるので，領域内の格子点の個数を b_n とすると，



(i)　n が偶数のとき

$$b_n=\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1}(n-2k-1)$$
$$=(n-1)\left(\frac{n}{2}-1\right)-2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\cdot\frac{n}{2}=\frac{1}{4}(n-2)^2$$

(ii)　n が奇数のとき

$$b_n=\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}(n-2k-1)=(n-1)\cdot\frac{n-1}{2}-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n+1}{2}=\frac{1}{4}(n-1)(n-3)$$

(3)　まず，$\dfrac{a_n}{n^2}$ について，n が偶数のとき $\dfrac{a_n}{n^2}=\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{n^2}\to 0\ (n\to\infty)$，$n$ が奇数のとき $\dfrac{a_n}{n^2}=\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{2n^2}\to 0\ (n\to\infty)$から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=0$ である。

　次に，$\dfrac{b_n}{n^2}$ について，n が偶数のとき $\dfrac{b_n}{n^2}=\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{2}{n}\right)^2\to\dfrac{1}{4}\ (n\to\infty)$，$n$ が奇数のとき $\dfrac{b_n}{n^2}=\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{3}{n}\right)\to\dfrac{1}{4}\ (n\to\infty)$から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n^2}=\frac{1}{4}$ である。

［解 説］

格子点の個数を数えるのに場合分けが必要なケースです。しかし，2 直線 $q=k$，$p+2q=n$ の交点がつねに格子点となるので，さほど複雑ではありません。