1

解答解説のページへ

平行四辺形 ABCD において，対角線 AC を $2:3$ に内分する点を M，辺 AB を $2:3$ に内分する点を N，辺 BC を $t:1-t$ に内分する点を L とし，AL と CN の交点を P とする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，t を用いて表せ。

(2) 3 点 P, M, D が一直線上にあるとき，t の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

a を正の実数とする。関数 $f(x)=-x^2+ax$ について次の問いに答えよ。

(1) 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ を通る接線の方程式を $a,\ t$ を用いて表せ。

(2) 点 $\mathrm{A}(-a,\ 4a^2-5a+2)$ から曲線 $y=f(x)$ へ接線が 2 本引けることを示せ。

(3) その 2 本の接線のうち接点の x 座標が大きい方の接線を l, 接点を $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ とする。このとき, $0<t<a$ を満たすための a の範囲を求めよ。

(4) $a=1$ のとき, 直線 $x=-1$, 接線 l と曲線 $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

3

解答解説のページへ

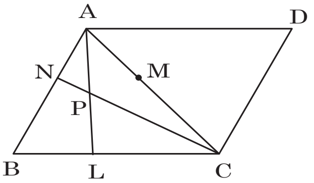
初項が 1 で公差が自然数 d である等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$n \geqq 3$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　$S_n = 94$ となる n と d がちょうど 1 組ある。その n と d を求めよ。

(2)　$S_n = 98$ となる n と d の組はない。その理由を述べよ。

1

問題のページへ



(1)　P は CN と AL の交点なので, k, l を実数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = k\cdot\frac{3}{5}\vec{a} + (1-k)\vec{c} \cdots\cdots\cdots ①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = (1-l)\vec{a} + lt\vec{c} \cdots\cdots\cdots ②$$

$\vec{a}$, $\vec{c}$ は 1 次独立なので, ①②より,

$$\frac{3}{5}k = 1-l \cdots\cdots\cdots ③,\ \ 1-k = lt \cdots\cdots\cdots ④$$

③より $l = 1-\frac{3}{5}k$, ④に代入して, $1-k = t\left(1-\frac{3}{5}k\right)$

$$(3t-5)k = 5(t-1),\ \ k = \frac{5(t-1)}{3t-5}$$

①より, $\overrightarrow{\mathrm{BP}} = \frac{3(t-1)}{3t-5}\vec{a} - \frac{2t}{3t-5}\vec{c}$

(2)　まず, $\overrightarrow{\mathrm{BM}} = \frac{3}{5}\vec{a} + \frac{2}{5}\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{BD}} = \vec{a} + \vec{c}$ より, $\overrightarrow{\mathrm{MD}} = \overrightarrow{\mathrm{BD}} - \overrightarrow{\mathrm{BM}} = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{c} \cdots\cdots\cdots ⑤$

$$\overrightarrow{\mathrm{PD}} = \overrightarrow{\mathrm{BD}} - \overrightarrow{\mathrm{BP}} = \frac{-2}{3t-5}\vec{a} + \frac{5t-5}{3t-5}\vec{c} \cdots\cdots\cdots ⑥$$

3 点 P, M, D が一直線上にある条件は, m を実数として, $\overrightarrow{\mathrm{PD}} = m\overrightarrow{\mathrm{MD}}$ より,

$$\frac{-2}{3t-5}\vec{a} + \frac{5t-5}{3t-5}\vec{c} = \frac{2}{5}m\vec{a} + \frac{3}{5}m\vec{c}$$

$\vec{a}$, $\vec{c}$ は 1 次独立なので, $\frac{-2}{3t-5} = \frac{2}{5}m$, $\frac{5t-5}{3t-5} = \frac{3}{5}m$

よって, $-6 = 2(5t-5)$ から, $t = \frac{2}{5}$

［解　説］

基本的な頻出問題です。(1)はメネラウスの定理を用いても OK です。

2

問題のページへ

(1)　$f(x)=-x^2+ax$ より，$f'(x)=-2x+a$

これより，点 $P(t,\ f(t))$ における接線の方程式は，

$$y-(-t^2+at)=(-2t+a)(x-t),\quad y=(-2t+a)x+t^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

(2)　①が点 $A(-a,\ 4a^2-5a+2)$ を通るとき，

$$4a^2-5a+2=(-2t+a)(-a)+t^2,\quad t^2+2at-5a^2+5a-2=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

②の判別式を計算すると，

$$D/4=a^2-(-5a^2+5a-2)=6a^2-5a+2=6\left(a-\frac{5}{12}\right)^2+\frac{23}{24}>0$$

よって，②は異なる 2 つの実数解をもち，接点は 2 つ存在する。すなわち，点 A から曲線 $y=f(x)$ へ接線を 2 本引くことができる。

(3)　$g(t)=t^2+2at-5a^2+5a-2$ とおくと，$g(t)=0$ の大きい方の解が，接線 l の接点の x 座標である。放物線 $y=g(t)$ の軸が $t=-a<0$ であることに注意すると，この解が $0<t<a$ にある条件は，

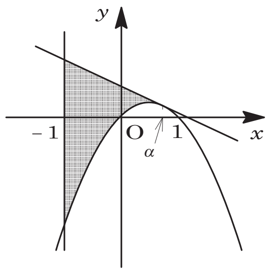
$$g(0)=-5a^2+5a-2<0 \cdots\cdots\cdots ③,\quad g(a)=-2a^2+5a-2>0 \cdots\cdots\cdots ④$$

③は $5a^2-5a+2>0$ となり，$D=25-40<0$ から，つねに成立する。

④より，$2a^2-5a+2<0$，$(2a-1)(a-2)<0$ なので，$\frac{1}{2}<a<2$

したがって，求める条件は $\frac{1}{2}<a<2$ である。

(4)　$a=1$ のとき，②は $t^2+2t-2=0$ となり，大きい方の解は $t=-1+\sqrt{3}$ となる。



ここで，$\alpha=-1+\sqrt{3}$ とおくと，接線 l は，①より $y=(-2\alpha+1)x+\alpha^2$ となるので，求める面積 S は，

$$S=\int_{-1}^{\alpha}\{(-2\alpha+1)x+\alpha^2-(-x^2+x)\}dx$$

$$=\int_{-1}^{\alpha}(x^2-2\alpha x+\alpha^2)dx=\int_{-1}^{\alpha}(x-\alpha)^2dx$$

$$=\frac{1}{3}\Big[(x-\alpha)^3\Big]_{-1}^{\alpha}=-\frac{1}{3}(-1-\alpha)^3=\sqrt{3}$$

[解　説]

前問に引き続き，本問も頻出のものです。細かく誘導がつけられています。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1) 初項 1，交差 d の等差数列の第 n 項までの和は $S_n = \dfrac{2+(n-1)d}{2}\cdot n$ となるので，

$S_n = 94$ のとき，

$$\{2+(n-1)d\}n = 2^2\times 47\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，n，d は自然数で，$n\geqq 3$ から，$2+(n-1)d\geqq 2+2=4$ となり，①より $3\leqq n\leqq 47$ である。さらに，$2^2\times 47$ の約数を考えて，n の値は 4，47 に絞られる。

$n=4$ のとき，①から $2+3d=47$，$d=15$

$n=47$ のとき，①から $2+46d=4$ となるが，$d\geqq 1$ より不成立。

よって，$(n,\ d)=(4,\ 15)$

(2) (1)と同様にして，$S_n = 98$ のとき，

$$\{2+(n-1)d\}n = 2^2\times 7^2\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，(1)と同様に，$2+(n-1)d\geqq 2+2=4$ から，②より $3\leqq n\leqq 49$ である。さらに，$2^2\times 7^2$ の約数を考えて，n の値は 4，7，14，28，49 に絞られる。

$n=4$ のとき，②から $2+3d=49$ となるが，$d=\dfrac{47}{3}$ より不適。

$n=7$ のとき，②から $2+6d=28$ となるが，$d=\dfrac{13}{3}$ より不適。

$n=14$ のとき，②から $2+13d=14$ となるが，$d\geqq 1$ より不成立。

$n=28$ のとき，②から $2+27d=7$ となるが，$d\geqq 1$ より不成立。

$n=49$ のとき，②から $2+48d=4$ となるが，$d\geqq 1$ より不成立。

以上より，$S_n=98$ となる n と d の組はない。

［解 説］

最初に考えた解を記しました。n の範囲の評価式をもっときつくすれば，場合分けの数は減少します。たとえば，$2+(n-1)d\geqq 2+n-1=n+1>n$ を利用します。もっとも，これは(2)で不成立が続くので，考え直した結果なのですが。