1

解答解説のページへ

行列 $A,\ B,\ C$ を $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ で定める。次の問いに答えよ。

(1) 積 ABC を計算せよ。

(2) $BCAB=kB$ となる定数 k を求めよ。

(3) 自然数 n に対して，$(ABC)^n$ を計算せよ。

2

解答解説のページへ

$\alpha = \cos\dfrac{360°}{5} + i\sin\dfrac{360°}{5}$ とする。ただし，i は虚数単位である。100 個の複素数 z_1，z_2，…，z_{100} を，$z_1 = \alpha$，$z_n = {z_{n-1}}^3$ $(n = 2,\ \cdots,\ 100)$ で定める。次の問いに答えよ。

(1) z_5 を α を用いて表せ。

(2) $z_n = \alpha$ となるような n の個数を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} z_n$ の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

a を正の定数とする。不等式 $a^x \geqq x$ が任意の正の実数 x に対して成り立つような a の値の範囲を求めよ。

4

解答解説のページへ

t を正の実数とし, k を自然数とする。無限等比級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-kt(n-1)}$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　上の無限級数の和を $f_k(t)$ とするとき, それを t と k を用いて表せ。

(2)　$x>0$ のとき, $F_k(x)=\displaystyle\int_1^x f_k(t)\,dt$ を計算せよ。

(3)　$x>0$ のとき, $\displaystyle\lim_{k\to\infty} F_k(x)$ を求めよ。

5

解答解説のページへ

次のようなゲームを考える。右のように 1 から 9 までの数字が書かれている表を用意する。

5	2	8
1	9	3
7	4	6

一方，9 枚のカードがあり 1 から 9 までの数字が 1 つずつ書かれている。これらのカードをよくまぜ，順に並べる。カードを並べた順に見て，カードに書いてある数字を表から消し，かわりに＊印を書き込む。この表で縦，横あるいは斜めのいずれかに＊印が 3 つ初めて並んだとき，その時点で表にある＊印の個数を得点とする。

たとえば，最初の 4 枚のカードが，順に 5, 4, 6, 9 であれば，下のように変化する。

＊	2	8
1	9	3
7	4	6

＊	2	8
1	9	3
7	＊	6

＊	2	8
1	9	3
7	＊	＊

＊	2	8
1	＊	3
7	＊	＊

その結果，＊印が初めて 3 つ並んだ。このとき，得点は 4 である。次の問いに答えよ。

(1)　このゲームで起こり得る最小の得点を求めよ。また，得点が最小となる確率を求めよ。

(2)　このゲームで起こり得る最大の得点を求めよ。また，得点が最大となる確率を求めよ。

1

問題のページへ

(1) $ABC=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ar & as \\ cr & cs \end{pmatrix}$

(2) $BCAB=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r & s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & ar+cs \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$kB=\begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$なので，$BCAB=kB$ より，$k=ar+cs$

(3) $k\neq 0$ のとき，$(ABC)^n=k^{n-1}ABC$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$ のとき　明らかに成立する。

(ii) $n=l$ のとき　$(ABC)^l=k^{l-1}ABC$ が成立すると仮定する。

$$(ABC)^{l+1}=k^{l-1}ABCABC=k^{l-1}A(BCAB)C=k^{l-1}AkBC=k^lABC$$

よって，$n=l+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$(ABC)^n=k^{n-1}ABC$

また，$k=0$ のときは, $n\geqq 2$ では明らかに $(ABC)^n=k^{n-1}ABC$ であるので,

$$(ABC)^n=(ar+cs)^{n-1}\begin{pmatrix} ar & as \\ cr & cs \end{pmatrix}$$

なお，$n=1$，$k=ar+cs=0$ のときは，$(ABC)^n=\begin{pmatrix} ar & as \\ cr & cs \end{pmatrix}$である。

［解 説］

行列 B に左から BCA をかけることは，B を k 倍することに等しくなります。これを用いて(3)の結論を予測しました。なお，0^0 は存在しないので，場合分けをしています。

$\boxed{2}$

問題のページへ

(1)　$\alpha=\cos\dfrac{360^\circ}{5}+i\sin\dfrac{360^\circ}{5}$ より，$\alpha^5=\cos 360^\circ+i\sin 360^\circ=1$ である。

条件より，$z_1=\alpha$ から $z_2=\alpha^3$ となり，$z_3=(\alpha^3)^3=\alpha^9=\alpha^5\cdot\alpha^4=\alpha^4$

$z_4=(\alpha^4)^3=\alpha^{12}=\alpha^{10}\cdot\alpha^2=\alpha^2$，$z_5=(\alpha^2)^3=\alpha^6=\alpha^5\cdot\alpha=\alpha$

(2)　(1)より，$z_5=\alpha$ なので，数列 $\{z_n\}$ は，α，α^3，α^4，α^2 をくり返す周期 4 の周期数列である。これより，$z_n=\alpha$ となるのは，$n=4k+1\ (k\geqq 0)$ のときである。

すると, $1\leqq n\leqq 100$ より $0\leqq k\leqq 24$ となり，$z_n=\alpha$ となる n は 25 個存在する。

(3)　$\alpha^5=1$ より，$(\alpha-1)(\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1)=0$

$\alpha\neq 1$ より，$\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$ となるので, (2)より,

$$\sum_{n=1}^{100} z_n=(\alpha+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^2)\times 25=(-1)\times 25=-25$$

［解 説］

(2)の周期性を丁寧に記述するならば，数学的帰納法の登場です。

3

問題のページへ

条件より，$a^x \geqq x\ (a>0,\ x>0)$ なので，

$$x\log a \geqq \log x,\ \ \log a \geqq \frac{\log x}{x} \cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1-\log x}{x^2}$$

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$(*)$ が任意の正の実数 x に対して成り立つ条件は，

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

$$\log a \geqq f(e)=\frac{1}{e},\ \ a \geqq e^{\frac{1}{e}}$$

［解　説］

有名頻出問題がノーヒントで出ています。

$\boxed{4}$

問題のページへ

(1)　初項 1，公比 e^{-kt} の無限等比級数の和 $f_k(t)$ は，$t>0$，$k\geqq 1$ から $|e^{-kt}|<1$ なので，

$$f_k(t)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-kt(n-1)}=\frac{1}{1-e^{-kt}}$$

(2)　$F_k(x)=\int_1^x f_k(t)\,dt=\int_1^x \frac{1}{1-e^{-kt}}\,dt=\int_1^x \frac{e^{kt}}{e^{kt}-1}\,dt$

ここで，$e^{kt}-1=u$ とおくと，$ke^{kt}\frac{dt}{du}=1$ となり，

$$F_k(x)=\int_{e^k-1}^{e^{kx}-1}\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{u}\,du=\frac{1}{k}\Big[\log|u|\Big]_{e^k-1}^{e^{kx}-1}=\frac{1}{k}\left\{\log(e^{kx}-1)-\log(e^k-1)\right\}$$

よって，$F_k(x)=\frac{1}{k}\log\frac{e^{kx}-1}{e^k-1}$

(3)　(2)より，$F_k(x)=\frac{1}{k}\log\frac{e^{kx}-1}{e^k-1}=\frac{1}{k}\log\left(\frac{1-e^{-kx}}{1-e^{-k}}\cdot\frac{e^{kx}}{e^k}\right)$

$$=\frac{1}{k}\log\frac{1-e^{-kx}}{1-e^{-k}}+\frac{1}{k}\log e^{k(x-1)}=\frac{1}{k}\log\frac{1-e^{-kx}}{1-e^{-k}}+x-1$$

よって，$\lim_{k\to\infty}F_k(x)=x-1$

[解　説]

数Ⅲの基本事項の理解を試すあっさりとした問題です。

5

問題のページへ

(1)　$*$印が3つ並べば終了なので，最小の得点は3である。

　このとき，縦に3つ並ぶのが3種類，横に3つ並ぶのが3種類，斜めの3つ並ぶのが2種類，合わせて8種類の場合がある。

　そのいずれの場合も，起こる確率は$\dfrac{1}{{}_9\mathrm{C}_3}$より，最小の得点となる確率は，

$$\frac{1}{{}_9\mathrm{C}_3}\times 8=\frac{2}{21}$$

(2)　まず，$*$印が7つのときは，数字は2つだけしか残っておらず，このときいずれかの行または列に$*$印が3つ並んでいる。

　次に，$*$印が6つのときは，数字は3つ残っている。この数字が，どの行にも，どの列にもあり，さらに斜めにも$*$印が3つないのは，右の2つの場合だけである。これより，最大の得点は7である。

*	*	8
*	9	*
7	*	*

5	*	*
*	9	*
*	*	6

　数字が8, 9, 7と残っているとき，7回目はいずれのカードを並べても$*$印が3つ並ぶので，その確率は，$\dfrac{1}{{}_9\mathrm{C}_6}\times 1=\dfrac{1}{84}$である。数字が5，9，6と残っているときも，同様に，7回目に$*$印が3つ並ぶ確率は$\dfrac{1}{84}$である。

　よって，最大の得点となる確率は，$\dfrac{1}{84}\times 2=\dfrac{1}{42}$となる。

［解 説］

パズルを解いていくおもしろさを感じます。もっとも，その過程を記述するのは，別ですが。