1

解答解説のページへ

三角形 OAB において，辺 OA，辺 OB の長さをそれぞれ a，b とする。また，角 AOB は直角でないとする。2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を k とおく。次の問いに答えよ。

(1) 直線 OA 上に点 C を，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と垂直になるようにとる。$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を a，k，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を用いて表せ。

(2) $a=\sqrt{2}$，$b=1$ とする。直線 BC 上に点 H を，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と垂直になるようにとる。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=u\overrightarrow{\mathrm{OA}}+v\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくとき，u と v をそれぞれ k で表せ。

2

解答解説のページへ

a を正の実数とする。関数 $f(x)=ax^2+(1-2a)x$ が次の 2 つの条件

(i)　$-3 \leqq x < 0$ のとき，$f(x) \geqq -1$

(ii)　$x \geqq 0$ のとき，$f(x) \geqq 0$

をともに満たすような a の値の範囲を求めよ。

3

解答解説のページへ

a を正の実数とする。次の問いに答えよ。

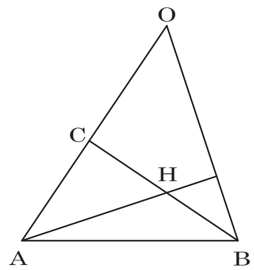
(1)　$y=\left|x^2-a|x|\right|$ のグラフをかけ。

(2)　$F(a)=\int_{-1}^{1}\left|x^2-a|x|\right|dx$ を求めよ。

(3)　$F(a)$ の最小値を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　条件より，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = a$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = b$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = k$

まず，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0$ から，

$$(t\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = 0,\quad a^2t - k = 0$$

よって，$t = \dfrac{k}{a^2}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \dfrac{k}{a^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

(2)　$a = \sqrt{2}$ なので, (1)から，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \dfrac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

H は BC 上にあるので, p を定数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = p\overrightarrow{\mathrm{OC}} + (1-p)\overrightarrow{\mathrm{OB}} = p\cdot\frac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-p)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdots\cdots\cdots①$$

条件から，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0$，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = \sqrt{2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 1$ なので,

$$\left\{p\cdot\frac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + (1-p)\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\right\}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 0,\quad \frac{p}{2}k^2 + (1-p) - k = 0$$

まとめると，$(k^2-2)p = 2k-2$

ここで，$k = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\angle\mathrm{AOB} = \sqrt{2}\cos\angle\mathrm{AOB}$ から，$k \neq \pm\sqrt{2}$ となり,

$$p = \frac{2k-2}{k^2-2}\cdots\cdots\cdots②$$

一方, 条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = u\overrightarrow{\mathrm{OA}} + v\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdots\cdots\cdots③$

以上より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立なので，①②③から,

$$u = p\cdot\frac{k}{2} = \frac{k(k-1)}{k^2-2},\quad v = 1-p = \frac{k(k-2)}{k^2-2}$$

［解　説］

平面ベクトルの図形への応用についての基本問題です。

2

問題のページへ

$f(x)=ax^2+(1-2a)x=a\left(x-\dfrac{2a-1}{2a}\right)^2-\dfrac{(2a-1)^2}{4a}$ より，

(i) $\dfrac{2a-1}{2a}<0\ \left(0<a<\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

まず，$f(0)=0$ より，$x\geqq 0$ のとき $f(x)\geqq 0$ という条件は成立している。

(i-i) $\dfrac{2a-1}{2a}\geqq -3\ \left(\dfrac{1}{8}\leqq a<\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$-3\leqq x<0$ のとき $f(x)\geqq -1$ なので，$f\left(\dfrac{2a-1}{2a}\right)=-\dfrac{(2a-1)^2}{4a}\geqq -1$

$$(2a-1)^2\leqq 4a,\ \ 4a^2-8a+1\leqq 0,\ \ \frac{2-\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq \frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

すると，$\dfrac{1}{8}\leqq a<\dfrac{1}{2}$ と合わせて，$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\leqq a<\dfrac{1}{2}$

(i-ii) $\dfrac{2a-1}{2a}<-3\ \left(0<a<\dfrac{1}{8}\right)$ のとき

$-3\leqq x<0$ のとき $f(x)\geqq -1$ なので，$f(-3)=15a-3\geqq -1$

すると，$a\geqq\dfrac{2}{15}$ となるが，$0<a<\dfrac{1}{8}$ と合わせると, a は存在しない。

(ii) $\dfrac{2a-1}{2a}=0\ \left(a=\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$ より，条件に適する。

(iii) $\dfrac{2a-1}{2a}>0\ \left(a>\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$f\left(\dfrac{2a-1}{2a}\right)=-\dfrac{(2a-1)^2}{4a}<0$ より，$x\geqq 0$ のとき $f(x)\geqq 0$ という条件に反する。

(i)～(iii)より，$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$

［解 説］

場合分けの練習問題です。グラフを念頭において，論理を進めていくことがポイントです。

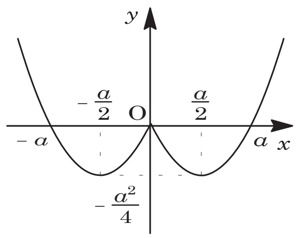
3

問題のページへ

(1)　まず，$y = x^2 - a|x|$……①に対して，

$$y = x^2 - ax = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}\quad (x \geqq 0)$$

$$y = x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}\quad (x < 0)$$

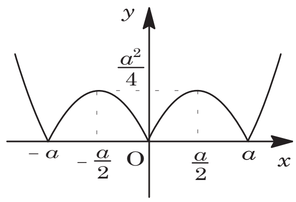


よって，①のグラフは右図のようになる。

すると，$y = \left|x^2 - a|x|\right|$……②に対して，

$$y = x^2 - a|x|\quad (x^2 - a|x| \geqq 0)$$

$$y = -x^2 + a|x|\quad (x^2 - a|x| < 0)$$



よって，②のグラフは，①のグラフの $y<0$ の部分を x 軸について折り返したものとなり，図示すると，右図のようになる。

(2)　②のグラフは y 軸対称なので，

$$F(a) = \int_{-1}^{1}\left|x^2 - a|x|\right|dx = 2\int_{0}^{1}\left|x^2 - a|x|\right|dx = 2\int_{0}^{1}\left|x^2 - ax\right|dx$$

(i)　$0 < a < 1$ のとき

$$F(a) = 2\int_{0}^{a} -(x^2 - ax)\,dx + 2\int_{a}^{1}(x^2 - ax)\,dx$$

$$= -2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{a}{2}x^2\right]_0^a + 2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{a}{2}x^2\right]_a^1$$

$$= -\frac{2}{3}a^3 + a^3 + \frac{2}{3}(1 - a^3) - a(1 - a^2) = \frac{2}{3}a^3 - a + \frac{2}{3}$$

(ii)　$a \geqq 1$ のとき

$$F(a) = 2\int_{0}^{1} -(x^2 - ax)\,dx = -2\left[\frac{x^3}{3} - \frac{a}{2}x^2\right]_0^1 = -\frac{2}{3} + a$$

(3)　(2)より，$0 < a < 1$ のとき，

$$F'(a) = 2a^2 - 1$$

すると，$F(a)$ の増減は右表のようになる。

a	0	…	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	…	1
$F'(a)$		$-$	0	$+$	
$F(a)$	$\frac{2}{3}$	↘		↗	$\frac{1}{3}$

また，$a \geqq 1$ のとき，$F(a) \geqq F(1) = \frac{1}{3}$ なので，$F(a)$ の最小値は，

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(2 - \sqrt{2})$$

［解 説］

前問に引き続き，本問も場合分けの練習問題となっています。