

1

解答解説のページへ

O を原点とする空間の 3 点 A(1, 1, 1), B(1, 2, 0), C(0, 0, 1) がある。

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} - \left(\frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|^2} \right) \overrightarrow{OA}$$

を満たす点を D とする。ただし, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ は \overrightarrow{OA} と \overrightarrow{OB} の内積を表す。次の問いに答えよ。

(1) D の座標を求めよ。

(2) 2 つの実数 s と t に対して, $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ を満たす点を P とする。 t を固定して考えたとき, $|\overrightarrow{CP}|^2$ を最小にする s を t を用いて表せ。

(3) $|\overrightarrow{CP}|^2$ を最小にする s と t の値を求めよ。

(4) (3) で求めた s と t の値をそれぞれ s_0 と t_0 とする。 s_0 と t_0 に対し, P_0 を $\overrightarrow{OP_0} = s_0\overrightarrow{OA} + t_0\overrightarrow{OB}$ を満たす点とする。

$$\overrightarrow{OP_0} = \left(\frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OA}|^2} \right) \overrightarrow{OA} + \left(\frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OB}|^2} \right) \overrightarrow{OB}$$

となることを示せ。

2

解答解説のページへ

a を正の実数とする。 xy 平面上の放物線 $C: y = x^2$ 上に点 $A(-a, a^2)$ をとる。
 $s > 0$ のとき、 x 軸上の点 $P(s, 0)$ に対して、直線 AP と C の 2 つの交点のうち、 A とは異なる交点を $Q(t, t^2)$ とする。 Q から x 軸に下ろした垂線と x 軸の交点を $P'(t, 0)$ とする。いま、 x 軸上の点 $P_1(c, 0)$ ($c > 0$) から出発して、点 P に対して点 Q 、 P' を定めたのと同じ方法で P_1 から点 Q_1 、 P_2 を定め、同様に P_2 から点 Q_2 、 P_3 を定め、この方法を繰り返して、 P_1, P_2, P_3, \dots と Q_1, Q_2, Q_3, \dots を定める。次の問いに答えよ。

(1) t を a と s を用いて表せ。

(2) 点 P_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) の x 座標を x_n とする。数列 $\{u_n\}$ を $u_n = \frac{1}{x_n}$ で定める。

$\{u_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 直角三角形 $P_n Q_n P_{n+1}$ の面積を S_n で表す。自然数 r を選んで、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r S_n$ が正

の実数値に収束するようにできる。このような r の値とそのときの極限值

$\lim_{n \rightarrow \infty} n^r S_n$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

a を実数とし, $a > 1$ とする。点 $P(1, a)$ を通り, 円 $C: x^2 + y^2 = 1$ と接する 2 本の直線のうち, $x = 1$ とは異なる直線を l とする。 l と x 軸の交点を Q とする。次の問いに答えよ。

- (1) $A(1, 0)$ とする。線分 QA の長さ L を a を用いて表せ。
- (2) 三角形 PQA の面積を S とする。 a が $a > 1$ の範囲を動くとき, S の最小値とそのときの a の値を求めよ。

4

解答解説のページへ

関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \text{ または } x > 2 \text{ のとき} \\ |x-1| & 0 \leq x \leq 2 \text{ のとき} \end{cases}$$

で定める。次の問いに答えよ。

- (1) $g(x) = f(f(x))$ とおく。関数 $y = g(x)$ のグラフをかけ。
- (2) n を自然数とする。 $\int_0^{n^2} g\left(\frac{x-n^2+n}{n}\right) \cos \frac{\pi x}{n} dx$ を求めよ。

5

解答解説のページへ

A, B, C, D 4つの袋の中にそれぞれ6枚のカードが入っている。それぞれのカードには1から9までの数字の1つが書かれている。A, B, C, Dの袋の中のカードは次の4つの条件を満たしているとする。

(i) 袋の中からカードを無作為に1枚抜いたとき、カードに書かれている数字の期待値は、A, B, C, Dすべて同じである。

(ii) $p(A, B) = p(B, C) = p(C, D) = p(D, A) = \frac{2}{3}$ である。ここで、 $p(X, Y)$

は袋Xと袋Yからそれぞれ1枚ずつカードを無作為に抜いたとき、Xから抜いたカードに書かれている数字がYから抜いたカードに書かれている数字より大きい確率を表す。

(iii) A, B, Cの袋の中のカードに書かれている数字はそれぞれ2種類で、Dの袋の中のカードにはすべて同じ数字が書かれている。

(iv) Aの袋の中のカードに書かれている数字の種類は3と9である。

次の問いに答えよ。

- (1) Aの袋の中の3の書かれているカードの枚数と、Dの袋の中のカードに書かれた数字を求めよ。
- (2) Bの袋の中のカードに書かれている2種類の数字と、そのそれぞれの数字の書かれたカードの枚数を求めよ。
- (3) Cの袋の中のカードに書かれている2種類の数字と、そのそれぞれの数字の書かれたカードの枚数を求めよ。

1

問題のページへ

(1) $\overrightarrow{OA} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{OB} = (1, 2, 0)$, $\overrightarrow{OC} = (0, 0, 1)$ から,

$$|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}, \quad |\overrightarrow{OB}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}, \quad |\overrightarrow{OC}| = 1$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 1+2=3, \quad \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0, \quad \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 1$$

すると, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} - \left(\frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|^2} \right) \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (0, 1, -1)$ なので, D の座標は

D(0, 1, -1)である。

(2) $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$ より,

$$|\overrightarrow{CP}|^2 = |s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}|^2$$

$$= s^2|\overrightarrow{OA}|^2 + t^2|\overrightarrow{OB}|^2 + |\overrightarrow{OC}|^2 + 2st\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - 2t\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} - 2s\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}$$

$$= 3s^2 + 5t^2 + 1 + 6st - 2s = 3s^2 + (6t - 2)s + 5t^2 + 1$$

$$= 3\left(s + \frac{3t-1}{3}\right)^2 + 2t^2 + 2t + \frac{2}{3}$$

よって, $s = -\frac{3t-1}{3}$ のとき, $|\overrightarrow{CP}|^2$ は最小になる。

(3) (2)より, $|\overrightarrow{CP}|^2 = 3\left(s + \frac{3t-1}{3}\right)^2 + 2\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}$ となり, $|\overrightarrow{CP}|^2$ が最小になるのは,

$s + \frac{3t-1}{3} = 0$ かつ $t + \frac{1}{2} = 0$ のときである。

すなわち, $s = \frac{5}{6}$, $t = -\frac{1}{2}$ のときである。

(4) 条件より, $\overrightarrow{OP}_0 = s_0\overrightarrow{OA} + t_0\overrightarrow{OB} = \frac{5}{6}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

また, $\frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OA}|^2} = \frac{1}{3}$, $\frac{\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OD}|^2} = -\frac{1}{2}$ から,

$$\left(\frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OA}|^2}\right)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OD}|^2}\right)\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{5}{6}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

よって, $\overrightarrow{OP}_0 = \left(\frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OA}|^2}\right)\overrightarrow{OA} + \left(\frac{\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OD}|^2}\right)\overrightarrow{OD}$

[解説]

問題文からはいかめしい雰囲気は漂っていますが, 内容はベクトルの基本題です。

2

問題のページへ

(1) 直線 AP の方程式は、 $y - a^2 = \frac{-a^2}{s+a}(x+a)$

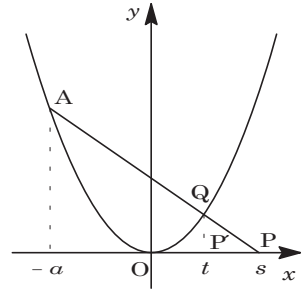
放物線 $C: y = x^2$ との交点は、

$$x^2 - a^2 = \frac{-a^2}{s+a}(x+a)$$

$$(x+a)(x-a) + \frac{a^2}{s+a}(x+a) = 0$$

$x \neq -a$ より、 $x = a - \frac{a^2}{s+a} = \frac{as}{s+a}$ から、

$$t = \frac{as}{s+a}$$



(2) (1)と同様に考えると、 $x_{n+1} = \frac{ax_n}{x_n + a}$

ここで、 $x_1 = c > 0$ より、帰納的に $x_n > 0$ となることより、

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{x_n + a}{ax_n} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{a}$$

$u_n = \frac{1}{x_n}$ より、 $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{a}$ となり、

$$u_n = u_1 + \frac{1}{a}(n-1) = \frac{1}{c} + \frac{1}{a}(n-1) = \frac{a+c(n-1)}{ac}$$

(3) (2)より、 $x_n = \frac{1}{u_n} = \frac{ac}{a+c(n-1)}$

$$\begin{aligned} \text{よって、} S_n &= \frac{1}{2} P_n P_{n+1} \cdot P_{n+1} Q_n = \frac{1}{2} (x_n - x_{n+1}) x_{n+1}^2 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{ac}{a+c(n-1)} - \frac{ac}{a+cn} \right\} \cdot \frac{a^2 c^2}{(a+cn)^2} = \frac{a^3 c^4}{2 \{a+c(n-1)\} (a+cn)^3} \end{aligned}$$

$$n^r S_n = \frac{a^3 c^4 n^r}{2 \{a+c(n-1)\} (a+cn)^3} = \frac{a^3 c^4 n^{r-4}}{2 \left\{ \frac{a}{n} + c \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right\} \left(\frac{a}{n} + c \right)^3}$$

これより、 $r \geq 5$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r S_n = \infty$ 、 $r \leq 3$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} n^r S_n = 0$ となるので、

$\lim_{n \rightarrow \infty} n^r S_n$ が正の実数値に収束するのは、 $r = 4$ のときであり、このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^r S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^3 c^4}{2 \left\{ \frac{a}{n} + c \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right\} \left(\frac{a}{n} + c \right)^3} = \frac{a^3}{2}$$

[解説]

問題文が長いですが、題意を正確に読み取れば、立式やその後の計算は平易です。

3

問題のページへ

- (1) 円
- C
- と
- l
- との接点を
- T
- とおくと、

$$\frac{OT}{OQ} = \frac{PA}{PQ}$$

そこで、 $Q(q, 0)$ とすると、

$$\frac{1}{-q} = \frac{a}{\sqrt{(1-q)^2 + a^2}}, \quad \sqrt{(1-q)^2 + a^2} = -aq$$

両辺を 2 乗して、 $(a^2 - 1)q^2 + 2q - (a^2 + 1) = 0$

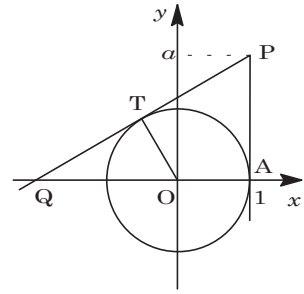
$$\{(a^2 - 1)q + a^2 + 1\}(q - 1) = 0$$

$$q \neq 1 \text{ より, } q = -\frac{a^2 + 1}{a^2 - 1}$$

$$\text{よって, } L = 1 - q = 1 + \frac{a^2 + 1}{a^2 - 1} = \frac{2a^2}{a^2 - 1}$$

- (2)
- $S = \frac{1}{2}QA \cdot PA = \frac{1}{2} \cdot \frac{2a^2}{a^2 - 1} \cdot a = \frac{a^3}{a^2 - 1}$
- より、

$$S' = \frac{3a^2(a^2 - 1) - a^3 \cdot 2a}{(a^2 - 1)^2} = \frac{a^2(a^2 - 3)}{(a^2 - 1)^2}$$

右表より、 $a = \sqrt{3}$ のとき、 S は最小値 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。

a	1	...	$\sqrt{3}$...
S'		-	0	+
S		↘		↗

[解説]

図形と式および微分法についての基本問題です。なお、(1)は、いろいろな解き方が考えられます。

4

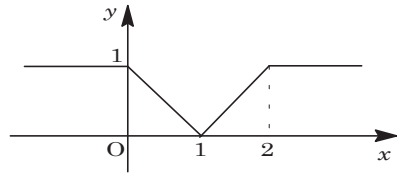
問題のページへ

(1) 条件より, $f(x)=1$ ($x<0$ または $x>2$)

$$f(x)=-x+1 \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$f(x)=x-1 \quad (1 \leq x \leq 2)$$

したがって, $y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



さて, $g(x)=f(f(x))$ については,

(i) $x<0$ または $x>2$ のとき

$$g(x)=f(1)=0$$

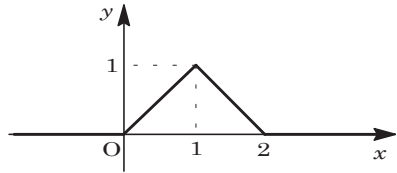
(ii) $0 \leq x \leq 1$ のとき

$$g(x)=f(-x+1)=-(-x+1)+1=x$$

(iii) $1 \leq x \leq 2$ のとき

$$g(x)=f(x-1)=-(x-1)+1=-x+2$$

したがって, $y=g(x)$ のグラフは右図のようになる。

(2) $I = \int_0^{n^2} g\left(\frac{x-n^2+n}{n}\right) \cos \frac{\pi x}{n} dx$ とおく。

$0 \leq x \leq n^2$ のとき, $-n+1 \leq \frac{x-n^2+n}{n} \leq 1$ より,

(i) $-n+1 \leq \frac{x-n^2+n}{n} \leq 0$ ($0 \leq x \leq n^2-n$) のとき $g\left(\frac{x-n^2+n}{n}\right)=0$ (ii) $0 \leq \frac{x-n^2+n}{n} \leq 1$ ($n^2-n \leq x \leq n^2$) のとき $g\left(\frac{x-n^2+n}{n}\right)=\frac{x-n^2+n}{n}$ (i)(ii)より, $I = \int_{n^2-n}^{n^2} \frac{x-n^2+n}{n} \cos \frac{\pi x}{n} dx$

ここで, $\frac{x}{n}=t$ とおくと, $\frac{1}{n}dx=dt$ より,

$$\begin{aligned} I &= \int_{n-1}^n (t-n+1) \cos \pi t \cdot n dt = \frac{n}{\pi} \left[(t-n+1) \sin \pi t \right]_{n-1}^n - \frac{n}{\pi} \int_{n-1}^n \sin \pi t dt \\ &= \frac{n}{\pi^2} \left[\cos \pi t \right]_{n-1}^n = \frac{n}{\pi^2} \{ \cos n\pi - \cos(n-1)\pi \} \\ &= \frac{n}{\pi^2} \{ (-1)^n - (-1)^{n-1} \} = \frac{2n}{\pi^2} (-1)^n \end{aligned}$$

[解説]

関数の合成および定積分の計算について, 基本の確認問題です。

5

問題のページへ

(1) A の中に 3 のカードが x 枚, 9 のカードが $6-x$ 枚入っているとす。また, D の中のカードには数字 n が書かれているとす。

$$\text{条件(i)より, } 3 \times \frac{x}{6} + 9 \times \frac{6-x}{6} = n \text{ なので, } 9-x = n \cdots \cdots \textcircled{1}$$

条件(ii)より, $p(D, A) = \frac{2}{3}$ なので, $4 \leq n \leq 8$ であり, しかも A から 3 のカードを抜く確率が $\frac{2}{3}$ であることから,

$$\frac{x}{6} = \frac{2}{3}, x = 4$$

①に代入すると, $n = 5$

したがって, A の中の 3 のカードは 4 枚, また D の中のカードに書かれた数字は 5 である。

(2) B の中に数字 k のカードが y 枚, 数字 l のカードが $6-y$ 枚入っているとす。ただし, $k < l$ とす。

$$\text{条件(i)より, } k \times \frac{y}{6} + l \times \frac{6-y}{6} = 5 \text{ なので, } ky + l(6-y) = 30 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

条件(ii)より, $p(A, B) = \frac{2}{3}$ なので, $k < l < 3$ の場合はありえない。

(a) $k < 3 \leq l < 9$ のとき

$$p(A, B) = \frac{2}{3} \times \frac{y}{6} + \frac{1}{3} \times 1 \text{ から, } \frac{y}{9} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \text{ より } y = 3 \text{ となる。}$$

このとき, ②から $k+l=10$ となり, $k < 3 \leq l < 9$ を満たすのは,

$$k = 2, l = 8$$

(b) $k < 3 < l = 9$ のとき

$$p(A, B) = \frac{2}{3} \times \frac{y}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{y}{6} \text{ から, } \frac{y}{6} = \frac{2}{3} \text{ より } y = 4 \text{ となる。}$$

このとき, ②から $2k+9=15$ となり, $k=3$ であるので, 適さない。

(c) $3 \leq k < l < 9$ のとき

$$p(A, B) = \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{3} \text{ となり, 適さない。}$$

(d) $3 \leq k < l = 9$ のとき

$$p(A, B) = \frac{1}{3} \times \frac{y}{6} = \frac{y}{18} \text{ となり, } \frac{y}{18} = \frac{2}{3} \text{ から } y = 12 \text{ であるので, 適さない。}$$

(a)~(d)より, B の中のカードは, 数字 2 が 3 枚, 数字 8 が 3 枚である。

(3) C の中に数字 i のカードが z 枚, 数字 j のカードが $6-z$ 枚入っているとす。ただし, $i < j$ とす。

$$\text{条件(i)より, } i \times \frac{z}{6} + j \times \frac{6-z}{6} = 5 \text{ なので, } iz + j(6-z) = 30 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

条件(ii)より, $p(C, D) = \frac{2}{3}$ なので, $i \leq 5 < j$ となる。

$p(C, D) = \frac{6-z}{6} \times 1$ となり, $\frac{6-z}{6} = \frac{2}{3}$ から $z = 2$ となる。

このとき, ③から $i+2j = 15$ となり, $i \leq 5 < j$ を満たすのは,

$$(i, j) = (1, 7), (3, 6)$$

(a) $(i, j) = (1, 7)$ のとき

$$p(B, C) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \times 1 = \frac{2}{3}$$

(b) $(i, j) = (3, 6)$ のとき

$$p(B, C) = \frac{3}{6} \times 1 = \frac{1}{2} \text{ となり, 適さない。}$$

(a)(b)より, C の中のカードは, 数字 1 が 2 枚, 数字 7 が 4 枚である。

[解説]

パズルのような問題です。場合分けを丁寧に行い, 論理を一步ずつ詰めていくという作業が要求されます。