1

解答解説のページへ

平面上に原点 O から出る，相異なる 2 本の半直線 OX，OY をとり，$\angle\mathrm{XOY} < 180^\circ$ とする。半直線 OX 上に O と異なる点 A を，半直線 OY 上に O と異なる点 B とり，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 点 C が $\angle\mathrm{XOY}$ の二等分線上にあるとき，ベクトル $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ はある実数 t を用いて $\vec{c} = t\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ と表されることを示せ。

(2) $\angle\mathrm{XOY}$ の二等分線と $\angle\mathrm{XAB}$ の二等分線の交点を P とおく。$\mathrm{OA} = 2$，$\mathrm{OB} = 3$，$\mathrm{AB} = 4$ のとき，$\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

実数 t に対して, xy 平面上の直線 $l_t : y = 2tx - t^2$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　点 P を通る直線 l_t はただ 1 つであるとする。このような点 P の軌跡の方程式を求めよ。

(2)　t が $|t| \geqq 1$ の範囲を動くとき, 直線 l_t が通る点 $(x,\ y)$ の全体を図示せよ。

3

解答解説のページへ

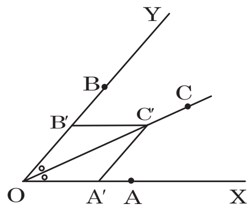
$\alpha=\dfrac{3+\sqrt{7}i}{2}$ とする。ただし，i は虚数単位である。次の問いに答えよ。

(1)　α を解にもつような 2 次方程式 $x^2+px+q=0$（$p,\ q$ は実数）を求めよ。

(2)　整数 a，b，c を係数とする 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ について，解の 1 つは α であり，また $0\leqq x\leqq 1$ の範囲に実数解を 1 つもつとする。このような整数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。

1

問題のページへ



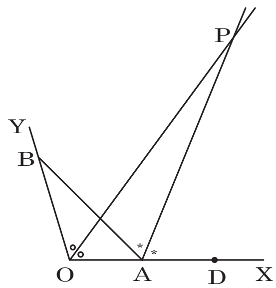
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ は，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ と同じ向きの単位ベクトルである。

これから，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} + \overrightarrow{\mathrm{OB'}} = \overrightarrow{\mathrm{OC'}}$ とすると，線分 OC′ は OA′，OB′ を隣り合う 2 辺とするひし形の対角線となる。

よって，t を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = t\overrightarrow{\mathrm{OC'}} = t(\overrightarrow{\mathrm{OA'}} + \overrightarrow{\mathrm{OB'}})$ である点 C は，$\angle\mathrm{XOY}$ の二等分線上にある。

(2)　$|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = 3$ なので，(1)より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\left(\frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{3}\right) \cdots\cdots\cdots ①$$



ここで，OD の中点を A として，点 D を定義すると，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = 2$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 4$ から，実数 s を用いて，(1)より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{2} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{4}\right) = \vec{a} + s\left(\frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b} - \vec{a}}{4}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{s}{4}\right)\vec{a} + \frac{s}{4}\vec{b} \cdots\cdots\cdots ②$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立なので，①②より，

$$\frac{t}{2} = 1 + \frac{s}{4} \cdots\cdots\cdots ③，\quad \frac{t}{3} = \frac{s}{4} \cdots\cdots\cdots ④$$

③④より，$\dfrac{t}{2} = 1 + \dfrac{t}{3}$，$t = 6$

よって，①から，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 6\left(\dfrac{\vec{a}}{2} + \dfrac{\vec{b}}{3}\right) = 3\vec{a} + 2\vec{b}$

［解 説］

角の二等分線をひし形の対角線として表現する有名問題です。なお，(2)の点 P は，三角形 OAB の傍心の 1 つです。

2

問題のページへ

(1)　$\mathrm{P}(x,\ y)$を通る直線$l_t : y = 2tx - t^2$ ……①がただ 1 つである条件は，①を t の方程式としてみたとき，ただ1つの解をもつことに対応する。

①より，$t^2 - 2xt + y = 0$となり，

$$D/4 = x^2 - y = 0$$

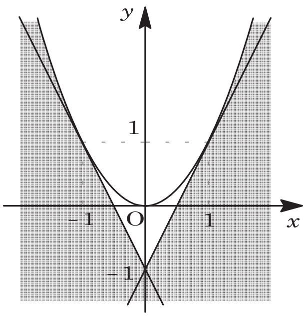
よって，点 P の軌跡の方程式は，$y = x^2$ ……②である。

(2)　①と②の共有点は，$2tx - t^2 = x^2$より，

$$(x-t)^2 = 0,\ x = t$$

これより，直線①は，放物線②の点$(t,\ t^2)$における接線である。

そこで，tが$|t| \geqq 1$すなわち$t \leqq -1$，$1 \leqq t$の範囲を動くとき，①において，$l_1 : y = 2x - 1$，$l_{-1} : y = -2x - 1$であることを利用すると，直線l_tの通過領域は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



［解 説］

直線①は，放物線②の点$(t,\ t^2)$における接線です。このためのヒントが(1)の役割でしょうが，気付きにくい部分です。もっとも，この点を無視しても，直線②の通過領域は，有名な実数解条件として求めることができます。

3

問題のページへ

(1)　実数係数の 2 次方程式の 1 つの解が$\alpha=\dfrac{3+\sqrt{7}i}{2}$であるとき，もう 1 つの解は $\overline{\alpha}=\dfrac{3-\sqrt{7}i}{2}$であるので，

$$\alpha+\overline{\alpha}=3,\ \ \alpha\overline{\alpha}=\frac{9+7}{4}=4$$

よって，α，$\overline{\alpha}$を解とする 2 次方程式は，解と係数の関係より，

$$x^2-3x+4=0$$

(2)　まず，x^3+ax^2+bx+cをx^2-3x+4で割ると，

$$x^3+ax^2+bx+c=(x^2-3x+4)(x+a+3)+(3a+b+5)x+(-4a+c-12)$$

ここで，3 次方程式$x^3+ax^2+bx+c=0$は，解としてα，$\overline{\alpha}$をもつので，

$$3a+b+5=0\cdots\cdots\cdots①,\ \ -4a+c-12=0\cdots\cdots\cdots②$$

このとき，もう 1 つの解は，$x=-a-3$となり，条件より，

$$0\leqq -a-3\leqq 1,\ \ -4\leqq a\leqq -3$$

すると，aは整数より，$a=-4,\ -3$

$a=-4$のとき，①より$b=7$，②より$c=-4$となり，また$a=-3$のとき，①より $b=4$，②より$c=0$となり，b, cも整数である。

以上より，$(a,\ b,\ c)=(-4,\ 7,\ -4)$，$(-3,\ 4,\ 0)$

［解 説］

複素数と方程式の基本題です。(2)では，3 次方程式の解と係数の関係を利用するという手もあります。