

1

解答解説のページへ

平面上に原点 O から出る、相異なる 2 本の半直線 OX , OY をとり、 $\angle XOY < 180^\circ$ とする。半直線 OX 上に O と異なる点 A を、半直線 OY 上に O と異なる点 B ととり、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおく。次の問いに答えよ。

- (1) 点 C が $\angle XOY$ の二等分線上にあるとき、ベクトル $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ はある実数 t を用いて $\vec{c} = t \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right)$ と表されることを示せ。
- (2) $\angle XOY$ の二等分線と $\angle XAB$ の二等分線の交点を P とおくと、 $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ を \vec{a} , \vec{b} および 3 辺の長さ $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{b} - \vec{a}|$ を用いて表せ。

2

解答解説のページへ

行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ と、実数 x, y, z, w を成分とする行列 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ を考える。

次の問いに答えよ。

- (1) X について関係式 $XA = AX$ が成立するための、 x, y, z, w の条件を求めよ。
- (2) X が $X^2 = A$ を満たすとき、 $XA = AX$ が成立することを示せ。
- (3) $X^2 = A$ を満たす行列 X をすべて求めよ。

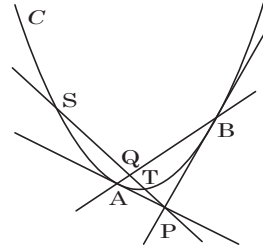
3

解答解説のページへ

xy 平面において放物線 $C: y = x^2$ と、その下側にある点 $P(p, q)$ ($q < p^2$) を考える。
 P を通るような C の 2 つの接線を考え、その接点をそれぞれ A, B とする。また、 P を通る傾き m の直線が C と相異なる 2 点 S, T で交わるとする。

点 A, B の x 座標をそれぞれ a, b とし、点 S, T の x 座標をそれぞれ s, t とする。次の問いに答えよ。

- (1) $a + b, ab$ を p, q で表せ。
- (2) $s + t, st$ を p, q, m で表せ。
- (3) 直線 AB と直線 ST の交点を Q とし、 Q の x 座標を u とする。右図のように $s < u < t < p$ となる場合について、等式 $\frac{1}{PS} + \frac{1}{PT} = \frac{2}{PQ}$ が成立することを示せ。



4

解答解説のページへ

xyz 空間に 3 点 $P(1, 1, 0)$, $Q(-1, 1, 0)$, $R(-1, 1, 2)$ をとる。次の問いに答えよ。

- (1) t を $0 < t < 2$ を満たす実数とするとき、平面 $z = t$ と、 $\triangle PQR$ の交わりに現れる線分の 2 つの端点の座標を求めよ。
- (2) $\triangle PQR$ を z 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ。

5

解答解説のページへ

$\alpha = \frac{3+\sqrt{7}i}{2}$ とする。ただし、 i は虚数単位である。次の問いに答えよ。

- (1) α を解にもつような 2 次方程式 $x^2 + px + q = 0$ (p, q は実数) を求めよ。
- (2) 整数 a, b, c を係数とする 3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ について、解の 1 つは α であり、また $0 \leq x \leq 1$ の範囲に実数解を 1 つもつとする。このような整数の組 (a, b, c) をすべて求めよ。

1

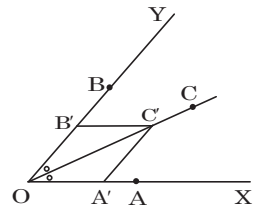
問題のページへ

(1) $\overrightarrow{OA'} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, $\overrightarrow{OB'} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ とおくと, $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$ は, それぞ

れ \vec{a} , \vec{b} と同じ向きの単位ベクトルである。

これから, $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OC'}$ とすると, 線分 OC' は OA' , OB' を隣り合う 2 辺とするひし形の対角線となる。

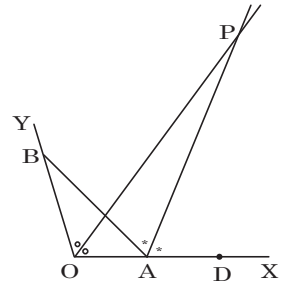
よって, t を実数として, $\overrightarrow{OC} = t\overrightarrow{OC'} = t(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'})$ である点 C は, $\angle XOY$ の二等分線上にある。



(2) 点 P は $\angle XOY$ の二等分線上にあるので, (1)より,

$$\overrightarrow{OP} = t \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \dots\dots\dots ①$$

また, 点 P は $\angle XAY$ の二等分線上にあるので, OD の中点を A として, 点 D を定義すると, s を実数として, (1)より,



$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OA} + s \left(\frac{\overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AD}|} + \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} \right) \\ &= \vec{a} + s \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b} - \vec{a}}{|\vec{b} - \vec{a}|} \right) = \left\{ 1 + s \left(\frac{1}{|\vec{a}|} - \frac{1}{|\vec{b} - \vec{a}|} \right) \right\} \vec{a} + \frac{s}{|\vec{b} - \vec{a}|} \vec{b} \dots\dots\dots ② \end{aligned}$$

\vec{a} , \vec{b} は 1 次独立なので, ①②より,

$$\frac{t}{|\vec{a}|} = 1 + s \left(\frac{1}{|\vec{a}|} - \frac{1}{|\vec{b} - \vec{a}|} \right) \dots\dots\dots ③, \quad \frac{t}{|\vec{b}|} = \frac{s}{|\vec{b} - \vec{a}|} \dots\dots\dots ④$$

④より $s = \frac{|\vec{b} - \vec{a}|}{|\vec{b}|} t$ となり, ③に代入して,

$$\frac{t}{|\vec{a}|} = 1 + \frac{|\vec{b} - \vec{a}|}{|\vec{b}|} \left(\frac{1}{|\vec{a}|} - \frac{1}{|\vec{b} - \vec{a}|} \right) t, \quad \left(\frac{1}{|\vec{a}|} + \frac{1}{|\vec{b}|} - \frac{|\vec{b} - \vec{a}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \right) t = 1$$

よって, $t = \frac{|\vec{a}| |\vec{b}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}| - |\vec{b} - \vec{a}|}$ となり, ①から,

$$\overrightarrow{OP} = \frac{|\vec{a}| |\vec{b}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}| - |\vec{b} - \vec{a}|} \left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \right) = \frac{1}{|\vec{a}| + |\vec{b}| - |\vec{b} - \vec{a}|} (|\vec{b}| \vec{a} + |\vec{a}| \vec{b})$$

[解説]

角の二等分線をひし形の対角線として表現する有名問題です。なお, (2)では傍心のベクトル表示を求めています。この具体例が, 文系で出題されています。

2

問題のページへ

$$(1) \quad XA = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x + \sqrt{3}y & -\sqrt{3}x + y \\ z + \sqrt{3}w & -\sqrt{3}z + w \end{pmatrix}$$

$$AX = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x - \sqrt{3}z & y - \sqrt{3}w \\ \sqrt{3}x + z & \sqrt{3}y + w \end{pmatrix}$$

条件より, $XA = AX$ なので,

$$x + \sqrt{3}y = x - \sqrt{3}z \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad -\sqrt{3}x + y = y - \sqrt{3}w \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$z + \sqrt{3}w = \sqrt{3}x + z \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad -\sqrt{3}z + w = \sqrt{3}y + w \cdots \cdots \textcircled{4}$$

①より $y = -z$, ②より $x = w$ となり, このとき③④は満たされている。

以上より, $w = x$, $z = -y$

$$(2) \quad X^2 = A \text{ のとき, } XA = X \cdot X^2 = X^3, \quad AX = X^2 \cdot X = X^3 \text{ なので,}$$

$$XA = AX$$

$$(3) \quad X^2 = A \text{ のとき, (2)より } XA = AX \text{ となる。}$$

すると, (1)から $w = x$, $z = -y$ であり,

$$X^2 = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & 2xy \\ -2xy & -y^2 + x^2 \end{pmatrix}$$

そこで, $X^2 = A$ から,

$$x^2 - y^2 = \frac{1}{2} \cdots \cdots \textcircled{5}, \quad 2xy = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{6} \text{より } y = \frac{-\sqrt{3}}{4x} \text{ となり, } \textcircled{5} \text{に代入して } x^2 - \frac{3}{16x^2} = \frac{1}{2}$$

$$16x^4 - 8x^2 - 3 = 0, \quad (4x^2 + 1)(4x^2 - 3) = 0$$

x は実数より $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, ⑥から $y = -\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\pm \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \mp \frac{1}{2}$ (複号同順) となり,

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

[解説]

成分の連立方程式を立て, それを解く問題ですが, (1)と(2)の誘導の結果, (3)の計算量はかなり減少しています。

3

問題のページへ

(1) 放物線 $C: y = x^2$ に対して、 $A(a, a^2)$ における接線は、 $y' = 2x$ より、

$$y - a^2 = 2a(x - a), \quad y = 2ax - a^2$$

点 $P(p, q)$ を通るので、 $q = 2ap - a^2, \quad a^2 - 2pa + q = 0 \dots\dots\dots ①$

同様に、 $B(b, b^2)$ における接線が点 $P(p, q)$ を通るので、

$$b^2 - 2pb + q = 0 \dots\dots\dots ②$$

①②より、 a, b は、 t についての 2 次方程式 $t^2 - 2pt + q = 0$ の 2 つの解となり、

$$a + b = 2p, \quad ab = q$$

(2) P を通る傾き m の直線 ST の方程式は、

$$y - q = m(x - p), \quad y = mx - mp + q \dots\dots\dots ③$$

放物線 $y = x^2$ との交点は、 $x^2 = mx - mp + q, \quad x^2 - mx + mp - q = 0$

この方程式の解が、 $x = s, t$ なので、 $s + t = m, \quad st = mp - q \dots\dots\dots ④$

(3) まず、 x, y の 1 次方程式 $y - 2px + q = 0$ を考えると、この式は直線を表し、しかも
①から $A(a, a^2)$ を通り、②から $B(b, b^2)$ を通る。

すなわち、直線 AB の方程式は、 $y - 2px + q = 0 \dots\dots\dots ⑤$ である。

すると、直線③と⑤の交点 Q は、 $mx - mp + q - 2px + q = 0$

$$(m - 2p)x = mp - 2q$$

ここで、④を用いて、 $s < t < p$ に注意すると、

$$m - 2p = s + t - 2p = (s - p) + (t - p) < 0$$

よって、 $x = \frac{mp - 2q}{m - 2p}$ となり、 $u = \frac{mp - 2q}{m - 2p} \dots\dots\dots ⑥$

さて、④⑥より、

$$\begin{aligned} (p - s + p - t)(p - u) &= (2p - m) \left(p - \frac{mp - 2q}{m - 2p} \right) \\ &= (2p - m)p + mp - 2q = 2p^2 - 2q \end{aligned}$$

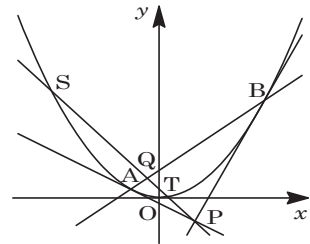
$$2(p - s)(p - t) = 2\{ p^2 - (s + t)p + st \} = 2(p^2 - mp + mp - q) = 2p^2 - 2q$$

以上より、 $(p - s + p - t)(p - u) = 2(p - s)(p - t) \dots\dots\dots ⑦$

そこで、⑦の両辺を $1 + m^2$ 倍すると、

$$(PS + PT)PQ = 2PS \cdot PT, \quad \frac{PS + PT}{PS \cdot PT} = \frac{2}{PQ}$$

すなわち、 $\frac{1}{PS} + \frac{1}{PT} = \frac{2}{PQ}$ が成立する。



[解説]

有名な極線と調和点列の問題ですが、文字がたくさん出て、道に迷いそうです。

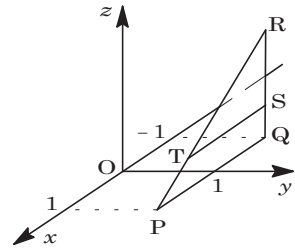
4

問題のページへ

- (1) $P(1, 1, 0)$, $Q(-1, 1, 0)$, $R(-1, 1, 2)$ のとき、
 まず線分 QR は xy 平面に垂直なので、平面 $z=t$ との交点 S の座標は、 $S(-1, 1, t)$ である。

また、線分 PR と平面 $z=t$ との交点 T は、線分 PR を $t : 2-t$ に内分する点より、

$$T\left(\frac{-t+2-t}{t+(2-t)}, \frac{t+2-t}{t+(2-t)}, t\right) = (1-t, 1, t)$$

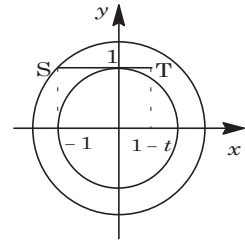


- (2) 点 T の x 座標の符号で場合分けをする。

- (i) $1-t \geq 0$ ($0 \leq t \leq 1$) のとき

線分 ST を z 軸のまわりに回転したときにできるドーナツ状の図形は、外径が $\sqrt{2}$ 、内径が 1 であるので、その面積 $S(t)$ は、

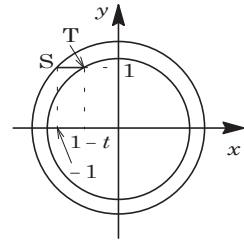
$$S(t) = \pi(\sqrt{2})^2 - \pi \cdot 1^2 = \pi$$



- (ii) $1-t \leq 0$ ($1 \leq t \leq 2$) のとき

線分 ST を z 軸のまわりに回転したときにできるドーナツ状の図形は、外径が $\sqrt{2}$ 、内径が $\sqrt{(1-t)^2 + 1^2}$ であるので、その面積 $S(t)$ は、

$$S(t) = \pi(\sqrt{2})^2 - \pi\left(\sqrt{(1-t)^2 + 1^2}\right)^2 = \pi(2t - t^2)$$



- (i)(ii)より、 $\triangle PQR$ の z 軸まわりの回転体の体積 V は、

$$V = \int_0^2 S(t) dt = \pi \int_0^1 dt + \pi \int_1^2 (2t - t^2) dt = \pi + \pi \left[t^2 - \frac{1}{3}t^3 \right]_1^2 = \frac{5}{3}\pi$$

[解説]

平面図形の回転体の体積を求める頻出題です。回転軸に垂直な回転体の切り口がドーナツ形であることがわかれば、積分計算は難しくありません。

5

問題のページへ

(1) 実数係数の 2 次方程式の 1 つの解が $\alpha = \frac{3+\sqrt{7}i}{2}$ であるとき、もう 1 つの解は

$$\bar{\alpha} = \frac{3-\sqrt{7}i}{2} \text{ であるので,}$$

$$\alpha + \bar{\alpha} = 3, \quad \alpha\bar{\alpha} = \frac{9+7}{4} = 4$$

よって、 $\alpha, \bar{\alpha}$ を解とする 2 次方程式は、解と係数の関係より、

$$x^2 - 3x + 4 = 0$$

(2) まず、 $x^3 + ax^2 + bx + c$ を $x^2 - 3x + 4$ で割ると、

$$x^3 + ax^2 + bx + c = (x^2 - 3x + 4)(x + a + 3) + (3a + b + 5)x + (-4a + c - 12)$$

ここで、3 次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ は、解として $\alpha, \bar{\alpha}$ をもつので、

$$3a + b + 5 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad -4a + c - 12 = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

このとき、もう 1 つの解は、 $x = -a - 3$ となり、条件より、

$$0 \leq -a - 3 \leq 1, \quad -4 \leq a \leq -3$$

すると、 a は整数より、 $a = -4, -3$

$a = -4$ のとき、 $\textcircled{1}$ より $b = 7$ 、 $\textcircled{2}$ より $c = -4$ となり、また $a = -3$ のとき、 $\textcircled{1}$ より $b = 4$ 、 $\textcircled{2}$ より $c = 0$ となり、 b, c も整数である。

以上より、 $(a, b, c) = (-4, 7, -4), (-3, 4, 0)$

[解説]

複素数と方程式の基本題です。(2)では、3 次方程式の解と係数の関係を利用するという手もあります。