1

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1) 漸化式$x_{n+1}-a=-2x_n+2a$（a は定数）で定まる数列x_1，x_2，x_3，$\cdots$の一般項x_nをx_1, aを用いて表せ。

(2) xy 平面において曲線$C: y=f(x)=x^3-3ax^2$（a は定数）を考える。C 上に点$\mathrm{P}_1(t_1,\ f(t_1))$をとる。ただし，$t_1 \neq a$とする。$\mathrm{P}_1$における C の接線と C の交点のうち，P_1と異なるものを$\mathrm{P}_2(t_2,\ f(t_2))$とする。$t_2$を$t_1, a$を用いて表せ。

(3) さらに，P_2における C の接線と C の交点のうち，P_2と異なるものをP_3とする。以下，同様にP_4，P_5，P_6，$\cdots$を定める。P_1，P_2，P_3，$\cdots$はすべて相異なることを示せ。

2

解答解説のページへ

xy 平面における曲線 $C: y=x^2$ と直線 $l: y=ax$ （a は正の定数）について，次の問いに答えよ。

(1) l と平行な，C の接線 m の方程式を a を用いて表せ。

(2) 原点 O と m の距離を a を用いて表せ。

(3) l と C の交点のうち O 以外のものを P とする。線分 OP を 1 辺とする四角形 OPQR が長方形となるように，m 上に 2 点 Q，R をとる。この長方形の面積が 2 となるときの a の値を求めよ。

3

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　1，2，3 の 3 種類の数字から重複を許して 3 つ選ぶ。選ばれた数の和が 3 の倍数となる組合せをすべて求めよ。

(2)　1 の数字を書いたカードを 3 枚，2 の数字を書いたカードを 3 枚，3 の数字を書いたカードを 3 枚，計 9 枚用意する。この中から無作為に，一度に 3 枚のカードを選んだとき，カードに書かれた数の和が 3 の倍数となる確率を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　$x_{n+1}-a=-2x_n+2a$ より，$x_{n+1}-a=-2(x_n-a)$ となり，

$$x_n-a=(x_1-a)(-2)^{n-1}$$

よって，$x_n=(x_1-a)(-2)^{n-1}+a$

(2)　$C: y=x^3-3ax^2$ ……①に対して，$y'=3x^2-6ax$

さて，$P_1(t_1,\ t_1{}^3-3at_1{}^2)$ における接線の方程式は,

$$y-(t_1{}^3-3at_1{}^2)=(3t_1{}^2-6at_1)(x-t_1)$$

まとめると，$y=(3t_1{}^2-6at_1)x-2t_1{}^3+3at_1{}^2$ ………②

①②の共有点は，$x^3-3ax^2=(3t_1{}^2-6at_1)x-2t_1{}^3+3at_1{}^2$

$$x^3-3ax^2-(3t_1{}^2-6at_1)x+2t_1{}^3-3at_1{}^2=0,\ (x-t_1)^2(x+2t_1-3a)=0$$

$x\neq t_1$ より，$x=-2t_1+3a$ となるので，$t_2=-2t_1+3a$ である。

(3)　(2)と同様にして，$t_{n+1}=-2t_n+3a$，$t_{n+1}-a=-2t_n+2a$

すると, (1)より，$t_n=(t_1-a)(-2)^{n-1}+a$

ここで，$t_l=t_m$ となる $l, m\ (l\neq m)$ の存在を仮定すると,

$$(t_1-a)(-2)^{l-1}+a=(t_1-a)(-2)^{m-1}+a$$

$$(t_1-a)\{(-2)^{l-1}-(-2)^{m-1}\}=0\ \text{………③}$$

条件より，$t_1\neq a$，$l\neq m$ なので, ③は成立しない。

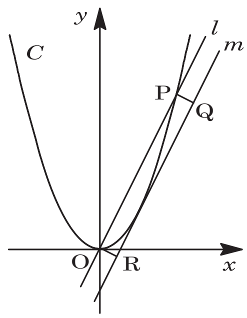
したがって，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ のとき, すべての t_n は異なる。すなわち，P_1，P_2，P_3，…はすべて相異なる。

［解 説］

(1)と(2)が, (3)の誘導になっています。いずれも設問も基本的です。

2

問題のページへ



(1)　$C : y = x^2$ ……①に対して，$y' = 2x$

さて，接点を$(t,\ t^2)$とするとき，接線の方程式は，

$$y - t^2 = 2t(x - t),\quad y = 2tx - t^2$$

この接線が，$l : y = ax$ ……②と平行なので，

$$2t = a,\quad t = \frac{a}{2}$$

よって，接線$m : y = ax - \dfrac{a^2}{4}$

(2)　原点Oと$m : ax - y - \dfrac{a^2}{4} = 0$との距離$d$は，

$$d = \frac{\left|-\dfrac{a^2}{4}\right|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{a^2}{4\sqrt{a^2+1}}$$

(3)　Cとlの交点は，①②より，$x^2 = ax$から，$x = 0,\ a$

すると，$\mathrm{P}(a,\ a^2)$より，$\mathrm{OP} = \sqrt{a^2 + a^4} = a\sqrt{1+a^2}$

さて，長方形OPQRの面積は，

$$\mathrm{OP}\cdot d = a\sqrt{1+a^2}\cdot\frac{a^2}{4\sqrt{a^2+1}} = \frac{a^3}{4}$$

条件より，$\dfrac{a^3}{4} = 2$なので，$a = 2$である。

［解　説］

接線を題材とした基本を確認する問題です。

3

問題のページへ

(1) 1, 2, 3 から重複を許して 3 つ選んだとき，その和が 3 の倍数となる組合せは，

$\{1,\ 1,\ 1\}$，$\{2,\ 2,\ 2\}$，$\{3,\ 3,\ 3\}$，$\{1,\ 2,\ 3\}$

(2) 9 枚のカードから 3 枚を選ぶ ${}_9C_3=84$ 通りが，同様に確からしいとする。

さて，カードに書かれた数の和が 3 の倍数となる場合は，(1)から，

(i) $\{1,\ 1,\ 1\}$，$\{2,\ 2,\ 2\}$，$\{3,\ 3,\ 3\}$のとき

それぞれ 1 通りずつで，合わせて 3 通りである。

(ii) $\{1,\ 2,\ 3\}$のとき

この場合は，${}_3C_1\times{}_3C_1\times{}_3C_1=27$ 通りとなる。

(i)(ii)より，$3+27=30$ 通りとなり，求める確率は，$\dfrac{30}{84}=\dfrac{5}{14}$ である。

［解 説］

何か裏があるのではないかと疑ってしまうほどの問題です。