1

解答解説のページへ

四面体 ABCD において，辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ O, P, Q, R とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OR}$ を用いて表せ。

(2) 辺 AC, BD 上にそれぞれ任意に点 E, F をとるとき，線分 EF の中点は 4 点 O, P, Q, R を含む平面上にあることを証明せよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

xy 平面において，O を原点，P を第 1 象限内の点とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　2 点 O，P を頂点とし，y 軸上に底辺をもつ二等辺三角形を考える。この二等辺三角形の周の長さが常に 2 となるような点 P の軌跡 T の方程式を求めよ。

(2)　T を(1)で求めた軌跡とし，a を実数とする。このとき，軌跡 T と直線 $y=a(x-1)$ が第 1 象限内で交点をもつような，a の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

$f(x)=e^x-x$ について，次の問いに答えよ。

(1) 実数 x について $f(x)\geqq 1$ であることを示せ。

(2) t は実数とする。このとき，曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $x=t$，$x=t-1$ および x 軸で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。

(3) $S(t)$ を最小にする t の値とその最小値を求めよ。

4

解答解説のページへ

$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \sin 2t \end{cases}$ $\left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$で表される曲線を C とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) y を x の式で表せ。

(2) x 軸と C で囲まれる図形 D の面積を求めよ。

(3) D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

5

解答解説のページへ

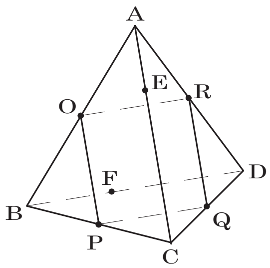
次の問いに答えよ。

(1)　1, 2, 3 の 3 種類の数字から重複を許して 3 つ選ぶ。選ばれた数の和が 3 の倍数となる組合せをすべて求めよ。

(2)　1 の数字を書いたカードを 3 枚, 2 の数字を書いたカードを 3 枚, 3 の数字を書いたカードを 3 枚, 計 9 枚用意する。この中から無作為に, 一度に 3 枚のカードを選んだとき, カードに書かれた数の和が 3 の倍数となる確率を求めよ。

1

問題のページへ



(1)　点 O, P, Q, R は，それぞれ辺 AB, BC, CD, DA の中点なので，中点連結定理を用いると，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

これより，四角形 OPQR は平行四辺形となるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

(2)　線分 EF の中点を M とする。また，$0<t<1$，$0<s<1$ として，$\mathrm{AE}:\mathrm{EC}=t:1-t$，$\mathrm{BF}:\mathrm{FD}=s:1-s$ とおく。

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\overrightarrow{\mathrm{BD}})$$
$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})+\frac{1}{2}t\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\frac{1}{2}s\overrightarrow{\mathrm{BD}}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{0}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=2\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}t\cdot2\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{1}{2}s\cdot2\overrightarrow{\mathrm{OR}}=t\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s\overrightarrow{\mathrm{OR}}$$

よって，点 M は 3 点 O, P, R を含む平面上にある。

さらに，(1)より，4 点 O, P, Q, R は同一平面上にあることから，点 M は 4 点 O, P, Q, R を含む平面上にある。

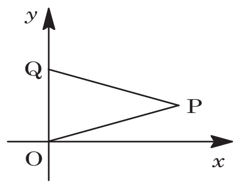
［解 説］

(1)で求めた関係は，ベクトルの計算だけでも導けますが，上記のように，中点連結定理を利用した方が単純明快です。

2

問題のページへ

(1)　二等辺三角形の底辺を OQ, 第 1 象限内の頂点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とする。ただし, $x>0$, $y>0$ である。



条件より, △OPQ の周の長さが 2 なので,

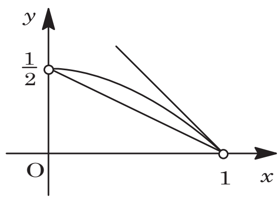
$$2\sqrt{x^2+y^2}+2y=2,\ \sqrt{x^2+y^2}=1-y$$

$y\leqq 1$ のもとで, 両辺を 2 乗すると, $x^2+y^2=(1-y)^2$

まとめると, 点 P の軌跡の方程式は,

$$y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2)　まず, $y=a(x-1)$ ……②は, 点(1, 0)を通り, 傾きが a の直線を表す。



さて, ①より $y'=-x$ となり, $x=1$ のとき $y'=-1$ である。すなわち, 点(1, 0)における接線の傾きは -1 となる。

また, ②が点$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$を通るとき, $a=-\dfrac{1}{2}$ である。

したがって, ①と②が第 1 象限内で交点をもつような a の範囲は, 図より,

$$-1<a<-\frac{1}{2}$$

［解 説］

(2)の別解として, ①と②の $x\neq 1$ の交点を求め, それが 0 より大, 1 より小という不等式を立てるという方法もあります。

3

問題のページへ

(1)　$f(x)=e^x-x$ に対して，$f'(x)=e^x-1$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになり，

$$f(x)\geqq 1$$

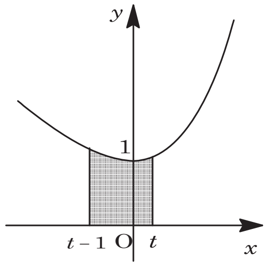
x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\nearrow$

(2)　曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $x=t$，$x=t-1$ および x 軸で囲まれた図形の面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\int_{t-1}^{t}(e^x-x)\,dx=\left[e^x-\frac{x^2}{2}\right]_{t-1}^{t}$$

$$=e^t-e^{t-1}-\frac{1}{2}\left\{t^2-(t-1)^2\right\}$$

$$=(e-1)e^{t-1}-t+\frac{1}{2}$$



(3)　(2)より，$S'(t)=(e-1)e^{t-1}-1$

これより，$S'(t)=0$ の解は，

$$e^{t-1}=\frac{1}{e-1}，\ t=1+\log\frac{1}{e-1}=\log\frac{e}{e-1}$$

すると，$S(t)$ の増減は右表のようになり，

t	$\cdots$	$\log\dfrac{e}{e-1}$	$\cdots$
$S'(t)$	$-$	0	$+$
$S(t)$	$\searrow$		$\nearrow$

$t=\log\dfrac{e}{e-1}$ のとき最小値をとる。その値は，

$$S\left(\log\frac{e}{e-1}\right)=(e-1)\cdot\frac{1}{e-1}-1-\log\frac{1}{e-1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\log(e-1)$$

[解 説]

微積分の応用に関する基本題です。複雑な計算も要求されていません。

4

問題のページへ

(1)　$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$x=\sin t$，$y=\sin 2t$ に対して，$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$ となり，

$$y = 2\sin t\cos t = 2x\sqrt{1-x^2}$$

(2)　(1)より，$y' = 2\sqrt{1-x^2} + \dfrac{2x\cdot(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}$

$$= \frac{2(1-2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$$

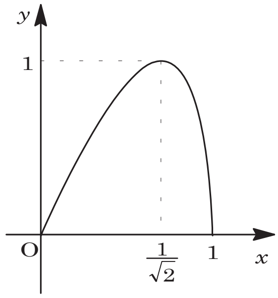
x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
y'	2	$+$	0	$-$	$\times$
y	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

よって，曲線 C の概形は右下図のようになる。

そこで，x 軸と C で囲まれる図形 D の面積 S は，$u=1-x^2$ とおくと，

$$S = \int_0^1 2x\sqrt{1-x^2}\,dx = \int_1^0 \sqrt{u}\,(-du)$$

$$= \int_0^1 \sqrt{u}\,du = \left[\frac{2}{3}u\sqrt{u}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$



(3)　D を y 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積 V は，$x=\sin t$ とおくと，

$$V = \int_0^1 2\pi x\cdot 2x\sqrt{1-x^2}\,dx = 4\pi\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = 4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t\,dt$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,dt = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)\,dt = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

［解 説］

(1)を誘導として，(2)の面積，(3)の体積を計算しています。(1)の設問がなければ，パラメータ表示のまま，S と V を計算していたことでしょう。なお，y 軸回転体の体積は，いわゆる円筒分割を利用しています。

$\boxed{5}$

問題のページへ

(1)　1, 2, 3 から重複を許して 3 つ選んだとき，その和が 3 の倍数となる組合せは,

$\{1,\ 1,\ 1\}$，$\{2,\ 2,\ 2\}$，$\{3,\ 3,\ 3\}$，$\{1,\ 2,\ 3\}$

(2)　9 枚のカードから 3 枚を選ぶ ${}_9C_3 = 84$ 通りが同様に確からしいとする。

さて，カードに書かれた数の和が 3 の倍数となる場合は, (1)から,

(i)　$\{1,\ 1,\ 1\}$，$\{2,\ 2,\ 2\}$，$\{3,\ 3,\ 3\}$のとき

それぞれ 1 通りずつで，合わせて 3 通りである。

(ii)　$\{1,\ 2,\ 3\}$のとき

この場合は，${}_3C_1 \times {}_3C_1 \times {}_3C_1 = 27$ 通りとなる。

(i)(ii)より，$3 + 27 = 30$ 通りとなり，求める確率は，$\dfrac{30}{84} = \dfrac{5}{14}$ である。

［解　説］

何か裏があるのではないかと疑ってしまうほどの問題です。