**1**

解答解説のページへ

$x$ の 2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ とその導関数 $f'(x)$ について，次の問いに答えよ。ただし，$a$, $b$, $c$ は定数で $a\neq 0$ とする。

(1) 実数 $\alpha$，$\beta$ について，$f(\alpha)=f(\beta)$ ならば $|f'(\alpha)|=|f'(\beta)|$ であることを示せ。

(2) 実数 $\alpha$，$\beta$ について，$|f'(\alpha)|=|f'(\beta)|$ ならば $f(\alpha)=f(\beta)$ であることを示せ。

**2**

解答解説のページへ

1 から $n$ までの自然数 $1, 2, 3, \cdots, n$ の和を $S$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $n$ を 4 で割った余りが 0 または 3 ならば，$S$ が偶数であることを示せ。

(2) $S$ が偶数ならば，$n$ を 4 で割った余りが 0 または 3 であることを示せ。

(3) $n$ を 8 で割った余りが 3 または 4 ならば，$S$ が 4 の倍数でないことを示せ。

**3**

解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　$xy$ 平面において，円 $(x-a)^2+(y-b)^2=2c^2$ と直線 $y=x$ が共有点をもたないための $a,\ b,\ c$ の条件を求めよ。ただし，$a,\ b,\ c$ は定数で $c \neq 0$ とする。

(2)　1 個のサイコロを 3 回投げて出た目の数を，順に $a,\ b,\ c$ とする。$a,\ b,\ c$ が(1)で求めた条件を満たす確率を求めよ。

**1**　　問題のページへ

(1)　$f(x)=ax^2+bx+c$ に対し，$f'(x)=2ax+b$

$f(\alpha)=f(\beta)$ のとき，$a\alpha^2+b\alpha+c=a\beta^2+b\beta+c$ より，

$$a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=0,\ (\alpha-\beta)\{a(\alpha+\beta)+b\}=0\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

(i)　$\alpha=\beta$ のとき

明らかに，$|f'(\alpha)|=|f'(\beta)|$ は成立する。

(ii)　$\alpha\neq\beta$ のとき

$(*)$より，$b=-a(\alpha+\beta)$ となり，$f'(x)=2ax-a(\alpha+\beta)$ から，

$$f'(\alpha)=2a\alpha-a(\alpha+\beta)=a(\alpha-\beta),\ f'(\beta)=2a\beta-a(\alpha+\beta)=-a(\alpha-\beta)$$

よって，$f'(\alpha)=-f'(\beta)$ より，$|f'(\alpha)|=|f'(\beta)|$ が成立する。

(2)　$|f'(\alpha)|=|f'(\beta)|$ のとき，$f'(\alpha)=\pm f'(\beta)$

(i)　$f'(\alpha)=f'(\beta)$ のとき

$2a\alpha+b=2a\beta+b$ より，$a(\alpha-\beta)=0$

$a\neq 0$ から $\alpha=\beta$ となり，$f(\alpha)=f(\beta)$ が成立する。

(ii)　$f'(\alpha)=-f'(\beta)$ のとき

$2a\alpha+b=-2a\beta-b$ より，$b=-a(\alpha+\beta)$ となり，

$$f(\alpha)-f(\beta)=a\alpha^2+b\alpha+c-(a\beta^2+b\beta+c)=(\alpha-\beta)\{a(\alpha+\beta)+b\}=0$$

よって，$f(\alpha)=f(\beta)$ が成立する。

［解　説］

2 次関数とその導関数についての性質を証明する基本問題です。

$\boxed{2}$ 問題のページへ

(1)　まず，$S=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$である。

さて, $k$ を 0 以上の整数として, $n$ を 4 で割った余りで分類する。

(i)　$n$ を 4 で割った余りが 0 のとき　$n=4k+4$ と表すと,

$$S=\frac{1}{2}(4k+4)(4k+5)=2(k+1)(4k+5)$$

(ii)　$n$ を 4 で割った余りが 3 のとき　$n=4k+3$ と表すと,

$$S=\frac{1}{2}(4k+3)(4k+4)=2(k+1)(4k+3)$$

(i)(ii)より, $S$ は偶数である。

(2)　$n$ を 4 で割った余りが 1 または 2 のときを考える。

(iii) $n$ を 4 で割った余りが 1 のとき　$n=4k+1$ と表すと,

$$S=\frac{1}{2}(4k+1)(4k+2)=(4k+1)(2k+1)$$

(iv) $n$ を 4 で割った余りが 2 のとき　$n=4k+2$ と表すと,

$$S=\frac{1}{2}(4k+2)(4k+3)=(2k+1)(4k+3)$$

(iii)(iv)より, $S$ はいずれも奇数である。

よって, (1)と合わせて考えると, $S$ が偶数ならば, $n$ を 4 で割った余りが 0 または 3 である。

(3)　$n$ を 8 で割った余りで分類すると,

(i)　$n$ を 8 で割った余りが 3 のとき　$n=8k+3$ と表すと,

$$S=\frac{1}{2}(8k+3)(8k+4)=2(8k+3)(2k+1)$$

$(8k+3)(2k+1)$ は奇数より, $S$ は 4 の倍数ではない。

(ii)　$n$ を 8 で割った余りが 4 のとき　$n=8k+4$ と表すと,

$$S=\frac{1}{2}(8k+4)(8k+5)=2(8k+5)(2k+1)$$

$(8k+5)(2k+1)$ は奇数より, $S$ は 4 の倍数ではない。

(i)(ii)より, $S$ は 4 の倍数でない。

［解 説］

余りで整数を分類するタイプの証明問題です。(2)は，(1)の逆の証明ですが，転換法を意識して記述しています。

**3**

問題のページへ

(1) 中心$(a,\ b)$，半径$\sqrt{2}|c|$の円$(x-a)^2+(y-b)^2=2c^2$と，直線$y=x$すなわち$x-y=0$が共有点をもたない条件は,

$$\frac{|a-b|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}>\sqrt{2}|c|,\ |a-b|>2|c|\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2) 1 個のサイコロを 3 回投げて出た目の数$(a,\ b,\ c)$の組は$6^3$通りあり，これが同様に確からしいとする。そこで, $(*)$を満たす数$(a,\ b,\ c)$の組は,

(i)　$c=1$のとき

$(*)$は，$|a-b|>2$となり，これを満たす$(a,\ b)$は, $a>b$では,

$(6,\ 1)$，$(6,\ 2)$，$(6,\ 3)$，$(5,\ 1)$，$(5,\ 2)$，$(4,\ 1)$

$a<b$のときも考えて，$6\times2=12$通りとなる。

(ii)　$c=2$のとき

$(*)$は，$|a-b|>4$となり，これを満たす$(a,\ b)$は，$a>b$ では$(6,\ 1)$のみである。

$a<b$のときも考えて，$1\times2=2$通りとなる。

(iii)　$c\geqq3$のとき

$(*)$は，$|a-b|>6$となり，これを満たす$(a,\ b)$は存在しない。

(i)(ii)(iii)より, $(*)$を満たす確率は，$\dfrac{12+2}{6^3}=\dfrac{7}{108}$である。

## ［解 説］

図形と式と確率の分野を混合した頻出問題です。2002 年にも同じパターンの問題が出ています。