

1

解答解説のページへ

実数 x, y に関する次の各命題の真偽を答えよ。さらに、真である場合は証明し、偽である場合は反例をあげよ。

- (1) $x > 0$ かつ $xy > 0$ ならば、 $y > 0$ である。
- (2) $x \geq 0$ かつ $xy \geq 0$ ならば、 $y \geq 0$ である。
- (3) $x + y \geq 0$ かつ $xy \geq 0$ ならば、 $y \geq 0$ である。

2

解答解説のページへ

xy 平面上に 3 点 $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$, $C(0, \sqrt{3})$ をとる。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) A, B の 2 点を中心とする同じ半径 r の 2 つの円が接する。このような r の値を求めよ。
- (2) (1) で求めた r の値について, C を中心とする半径 r の円が, A, B の 2 点を中心とする半径 r の 2 つの円のどちらとも接することを示せ。
- (3) A, B, C の 3 点を中心とする同じ半径 s の 3 つの円が直線 l に接する。このような s の値と直線 l の方程式をすべて求めよ。

3

解答解説のページへ

1 から n までの自然数 $1, 2, 3, \dots, n$ の和を S とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) n を 4 で割った余りが 0 または 3 ならば、 S が偶数であることを示せ。
- (2) S が偶数ならば、 n を 4 で割った余りが 0 または 3 であることを示せ。
- (3) S が 4 の倍数ならば、 n を 8 で割った余りが 0 または 7 であることを示せ。

4

解答解説のページへ

xy 平面上に 5 点 $A(0, 2)$, $B(2, 2)$, $C(2, 1)$, $D(4, 1)$, $P(0, 3)$ をとる。点 P を通り傾き a の直線 l が、線分 BC と交わり、その交点は B, C と異なるとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) a の値の範囲を求めよ。
- (2) 直線 l と線分 AB , 線分 BC で囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V_1 , 直線 l と線分 BC , 線分 CD で囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V_2 とするとき、それらの和 $V = V_1 + V_2$ を a の式で表せ。
- (3) (1) で求めた a の値の範囲で、(2) で求めた V は、 $a = -\frac{3}{4}$ のとき最小値をとることを示せ。

5

解答解説のページへ

n, k を自然数とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $(1+x)^n$ の展開式を用いて、次の等式を示せ。

$$2^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 + {}_n C_2 + {}_n C_3 + \cdots + {}_n C_n$$

$$0 = {}_n C_0 - {}_n C_1 + {}_n C_2 - {}_n C_3 + \cdots + (-1)^n {}_n C_n$$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^k$ を求めよ。

(3) 2 次の正方行列 $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ は、それぞれが $\frac{1}{3}$ の確率で、 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ のいずれかになるとする。 n 個の行列の積 $M_1 M_2 M_3 \cdots M_n$ が

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と等しくなる確率を求めよ。

1

問題のページへ

(1) 命題は真である。以下, 証明する。

$x > 0$ かつ $xy > 0$ より, $xy \cdot \frac{1}{x} > 0 \cdot \frac{1}{x}$ となる。すなわち, $y > 0$ である。

(2) 命題は偽である。

反例: $x = 0, y = -1$

(3) 命題は真である。以下, 証明する。

$x + y \geq 0$ かつ $xy \geq 0$ のとき, $y < 0$ と仮定する。

すると, $xy \geq 0$ かつ $y < 0$ から, $x \leq 0$ となり,

$$x + y < 0$$

これは, $x + y \geq 0$ と矛盾する。

よって, $x + y \geq 0$ かつ $xy \geq 0$ ならば, $y \geq 0$ である。

[解説]

上記のように, 式を変形することによって証明する以外に, 真理集合を図示して判断するという手もあります。

2

問題のページへ

- (1) $A(1, 0)$, $B(-1, 0)$ を中心とする半径 r の 2 つの円が接するのは、外接する場合のみなので、

$$2r = 2, \quad r = 1$$

- (2) $C(0, \sqrt{3})$ に対し、 $AC = 2$ より、 C を中心とする半径 1 の円は、 A を中心とする半径 1 の円に接する。

同様に、 $BC = 2$ より、 C を中心とする半径 1 の円は、 B を中心とする半径 1 の円に接する。

- (3) 3 点 A, B, C を中心とする半径 s の 3 つの円を、それぞれ円 A, B, C とする。

さて、(2)より、 $s = 1$ のとき、3 円 A, B, C は互いに外接し、3 円に接する接線は存在しない。また、 $s > 1$ のときは、3 円 A, B, C は互いに交わり、3 円に接する接線は存在しない。また、これより、3 円に接する直線 l は、 $s < 1$ のときに存在する。

- (i) 2 円 A, B の共通外接線に円 C が接するとき

2 円 A, B の共通外接線は x 軸に平行になり、 $l: y = s$ とおくことができ、直線 l と円 C が接することより、

$$\sqrt{3} - s = s, \quad s = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

すると、 $l: y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ である。

- (ii) 2 円 A, B の共通内接線に円 C が接するとき

まず、2 円 A, B の共通内接線は原点を通る。

ここで、 x 軸の正の部分とのなす角を θ とすると、

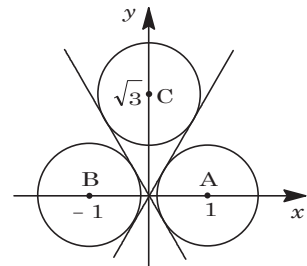
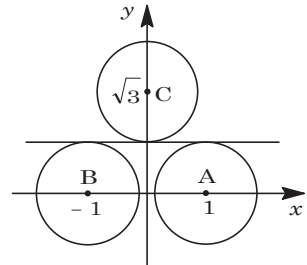
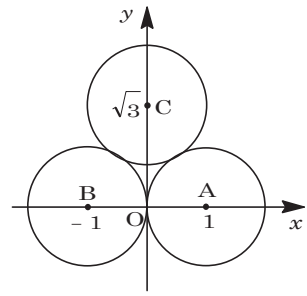
$$\sin \theta = s, \quad \tan \theta = \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}$$

直線 l は $y = \pm \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}x$ すなわち $\pm sx - \sqrt{1-s^2}y = 0$

とおくことができ、直線 l と円 C が接することより、

$$\frac{|-\sqrt{1-s^2} \cdot \sqrt{3}|}{\sqrt{s^2 + 1 - s^2}} = s, \quad 3(1-s^2) = s^2, \quad s = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

すると、 $l: y = \pm \sqrt{3}x$ である。



[解説]

(3)では、共通接線 l が 3 本存在しますが、対称性を考えると明らかでしょう。

3

問題のページへ

(1) まず, $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$ である。

さて, k を 0 以上の整数として, n を 4 で割った余りで分類する。

(i) n を 4 で割った余りが 0 のとき $n = 4k + 4$ と表すと,

$$S = \frac{1}{2}(4k+4)(4k+5) = 2(k+1)(4k+5)$$

(ii) n を 4 で割った余りが 3 のとき $n = 4k + 3$ と表すと,

$$S = \frac{1}{2}(4k+3)(4k+4) = 2(k+1)(4k+3)$$

(i)(ii)より, S は偶数である。

(2) (iii) n を 4 で割った余りが 1 のとき $n = 4k + 1$ と表すと,

$$S = \frac{1}{2}(4k+1)(4k+2) = (4k+1)(2k+1)$$

(iv) n を 4 で割った余りが 2 のとき $n = 4k + 2$ と表すと,

$$S = \frac{1}{2}(4k+2)(4k+3) = (2k+1)(4k+3)$$

(iii)(iv)より, S はいずれも奇数である。

よって, (1)と合わせ, S が偶数ならば, n を 4 で割った余りは 0 または 3 である。

(3) S が 4 の倍数ならば, (2)より, n を 4 で割った余りは 0 または 3 となるので, n を 8 で割った余りは 0, 3, 4, 7 のいずれかである。

(i) n を 8 で割った余りが 0 のとき $n = 8k + 8$ と表すと,

$$S = \frac{1}{2}(8k+8)(8k+9) = 4(k+1)(8k+9)$$

(ii) n を 8 で割った余りが 3 のとき $n = 8k + 3$ と表すと,

$$S = \frac{1}{2}(8k+3)(8k+4) = 2(8k+3)(2k+1)$$

$(8k+3)(2k+1)$ は奇数より, S は 4 の倍数ではない。

(iii) n を 8 で割った余りが 4 のとき $n = 8k + 4$ と表すと,

$$S = \frac{1}{2}(8k+4)(8k+5) = 2(8k+5)(2k+1)$$

$(8k+5)(2k+1)$ は奇数より, S は 4 の倍数ではない。

(iv) n を 8 で割った余りが 7 のとき $n = 8k + 7$ と表すと,

$$S = \frac{1}{2}(8k+7)(8k+8) = 4(k+1)(8k+7)$$

(i)~(iv)より, S が 4 の倍数ならば, n を 8 で割った余りが 0 または 7 である。

[解説]

余りで整数を分類するタイプの証明問題です。(2)は, (1)の逆の証明ですが, 転換法を意識して記述しています。(3)は(2)が誘導です。

4

問題のページへ

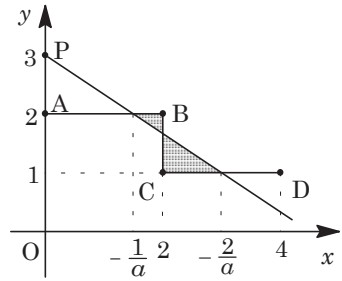
(1) 直線 PB の傾きは $-\frac{1}{2}$, PC の傾きは -1 より, 直線

$l: y = ax + 3$ が, 線分 BC と交わる条件は,

$$-1 < a < -\frac{1}{2}$$

(2) l と AB の交点は, $2 = ax + 3$ より, $x = -\frac{1}{a}$

l と CD の交点は, $1 = ax + 3$ より, $x = -\frac{2}{a}$



さて, l と AB, BC で囲まれる図形の, x 軸のまわりの回転体の体積 V_1 は,

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_{-\frac{1}{a}}^2 \{2^2 - (ax + 3)^2\} dx = \pi \int_{-\frac{1}{a}}^2 (-a^2x^2 - 6ax - 5) dx \\ &= -\pi \left[\frac{a^2}{3}x^3 + 3ax^2 + 5x \right]_{-\frac{1}{a}}^2 = -\frac{a^2}{3}\pi \left(8 + \frac{1}{a^3}\right) - 3a\pi \left(4 - \frac{1}{a^2}\right) - 5\pi \left(2 + \frac{1}{a}\right) \\ &= -\pi \left(\frac{8}{3}a^2 + 12a + 10 + \frac{7}{3a} \right) \end{aligned}$$

また, l と BC, CD で囲まれる図形の, x 軸のまわりの回転体の体積 V_2 は,

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi \int_2^{-\frac{2}{a}} \{(ax + 3)^2 - 1^2\} dx = \pi \int_2^{-\frac{2}{a}} (a^2x^2 + 6ax + 8) dx \\ &= \pi \left[\frac{a^2}{3}x^3 + 3ax^2 + 8x \right]_2^{-\frac{2}{a}} = \frac{a^2}{3}\pi \left(-\frac{8}{a^3} - 8\right) + 3a\pi \left(\frac{4}{a^2} - 4\right) + 8\pi \left(-\frac{2}{a} - 2\right) \\ &= -\pi \left(\frac{8}{3}a^2 + 12a + 16 + \frac{20}{3a} \right) \end{aligned}$$

よって, $V = V_1 + V_2 = -\pi \left(\frac{16}{3}a^2 + 24a + 26 + \frac{9}{a} \right)$

(3) (2)より, $\frac{dV}{da} = -\pi \left(\frac{32}{3}a + 24 - \frac{9}{a^2} \right) = -\frac{\pi}{3a^2} (32a^3 + 72a^2 - 27)$

$$= -\frac{\pi}{3a^2} (4a + 3)(8a^2 + 12a - 9)$$

ここで, 方程式 $8a^2 + 12a - 9 = 0$ の解は,
 $a = \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}}{4}$ となり, $-1 < a < -\frac{1}{2}$ において,

$$8a^2 + 12a - 9 < 0$$

これより, V は右表のように値が増減するので, $a = -\frac{3}{4}$ のとき最小値をとる。

| | | | | | |
|-----------------|------|------------|----------------|------------|----------------|
| a | -1 | \dots | $-\frac{3}{4}$ | \dots | $-\frac{1}{2}$ |
| $\frac{dV}{da}$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| V | | \searrow | | \nearrow | |

[解説]

円錐台の公式を使わないときには, 上記のように積分するのがベストです。なお, (3)が証明の設問になったのは, $\frac{dV}{da}$ が因数分解しにくいためでしょう。

5

問題のページへ

- (1) 二項定理より, $(1+x)^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 x + {}_n C_2 x^2 + {}_n C_3 x^3 + \cdots + {}_n C_n x^n$
 $x=1$ を代入すると, $2^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 + {}_n C_2 + {}_n C_3 + \cdots + {}_n C_n \cdots \cdots \textcircled{1}$
 $x=-1$ を代入すると, $0 = {}_n C_0 - {}_n C_1 + {}_n C_2 - {}_n C_3 + \cdots + (-1)^n {}_n C_n \cdots \cdots \textcircled{2}$

- (2) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと,

$$A^2 - E = O, \quad A^2 = E$$

よって, 帰納的に, k が偶数のとき $A^k = E$, k が奇数のとき $A^k = A$ である。

- (3) $M_1 M_2 M_3 \cdots M_n = E \cdots \cdots \textcircled{3}$ となる条件は, (2)より, $M_1, M_2, M_3, \cdots, M_n$ の偶数個が A であり, それ以外は E の場合に限る。

そこで, $\textcircled{3}$ が成立する確率を P とおくと, $1 \leq i \leq n$ として, $M_i = A$, $M_i = E$ となる確率が, それぞれ $\frac{1}{3}$ ずつであることより,

- (i) n が偶数のとき

$$\begin{aligned} P &= {}_n C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^n + {}_n C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^n + {}_n C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^n + \cdots + {}_n C_n \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n ({}_n C_0 + {}_n C_2 + {}_n C_4 + \cdots + {}_n C_n) \end{aligned}$$

ここで, $\textcircled{1}\textcircled{2}$ より, $2^n = 2({}_n C_0 + {}_n C_2 + {}_n C_4 + \cdots + {}_n C_n)$ となり,

$${}_n C_0 + {}_n C_2 + {}_n C_4 + \cdots + {}_n C_n = 2^{n-1}$$

よって, $P = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ となる。

- (ii) n が奇数のとき

$$\begin{aligned} P &= {}_n C_0 \left(\frac{1}{3}\right)^n + {}_n C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^n + {}_n C_4 \left(\frac{1}{3}\right)^n + \cdots + {}_n C_{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n ({}_n C_0 + {}_n C_2 + {}_n C_4 + \cdots + {}_n C_{n-1}) \end{aligned}$$

ここで, $\textcircled{1}\textcircled{2}$ より, $2^n = 2({}_n C_0 + {}_n C_2 + {}_n C_4 + \cdots + {}_n C_{n-1})$ となり,

$${}_n C_0 + {}_n C_2 + {}_n C_4 + \cdots + {}_n C_{n-1} = 2^{n-1}$$

よって, $P = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ となる。

- (i)(ii)より, n の偶奇にかかわらず, $P = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ である。

[解説]

頻出の行列の n 乗問題に, 二項定理や確率が味付けされた総合問題となっています。