1

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　xy 平面において，$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$とする。このとき,

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})^2+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\leqq 1$$

を満たす点 P 全体のなす図形の面積を求めよ。

(2)　xyz 空間において，$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$とする。このとき,

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})^2+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\leqq 1$$

を満たす点 P 全体のなす図形の体積を求めよ。

2

解答解説のページへ

a を正の実数とし，$f(x) = -a^2x^2 + 4ax$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$0 \leqq x \leqq 3$ における $f(x)$ の最大値を求めよ。

(2)　2 点 $\mathrm{A}(2,\ 3)$，$\mathrm{B}(3,\ 3)$ を端点とする線分を l とする。曲線 $y = f(x)$ と線分 l (端点を含む)が共有点をもつような a の値の範囲を求め，数直線上に図示せよ。

3

解答解説のページへ

以下の問いに答えよ。

(1)　A, B の 2 人がそれぞれ,「石」,「はさみ」,「紙」の 3 種類の「手」から無作為に 1 つを選んで, 双方の「手」によって勝敗を決める。「石」は「はさみ」に勝ち「紙」に負け,「はさみ」は「紙」に勝ち「石」に負け,「紙」は「石」に勝ち「はさみ」に負け, 同じ「手」どうしは引き分けとする。A が B に勝つ確率と引き分ける確率を求めよ。

(2)　上の 3 種類の「手」の勝敗規則を保ちつつ, これらに加えて, 4 種類目の「手」として「水」を加える。「水」は「石」と「はさみ」には勝つが「紙」には負け, 同じ「手」どうしは引き分けとする。A, B がともに 4 種類の「手」から無作為に 1 つを選ぶとするとき, A が勝つ確率と引き分けの確率を求めよ。

(3)　上の 4 種類の「手」の勝敗規則を保ちつつ, これらに加え, さらに第 5 の「手」として「土」を加える。B が 5 種類の「手」から無作為に 1 つを選ぶとき, A の勝つ確率が A の選ぶ「手」によらないようにするためには,「土」と「石」「はさみ」「紙」「水」との勝敗規則をそれぞれどのように定めればよいか。ただし, 同じ「手」どうしの場合, しかもその場合のみ引き分けとする。

1

問題のページへ

(1)　条件より，$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})^2+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\leqq 1$

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})^2+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})^2+(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\leqq 1\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$から，$(*)$より，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2\leqq 1$

よって，点 P は点 O を中心とする半径 1 の円の内部または周上にあり，点 P 全体のなす図形の面積 S は，

$$S=\pi\cdot 1^2=\pi$$

(2)　(1)と同様にすると$(*)$が成り立ち，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$から，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2\leqq 1$

よって，点 P は点 O を中心とする半径 1 の球の内部または周上にあり，点 P 全体のなす図形の面積 V は，

$$V=\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3=\frac{4}{3}\pi$$

［解 説］

まず，正射影ベクトルを横目に見ながら，(1)を成分計算して結論を導き，(2)へと進みました。しかし，この後，待ち構える計算量に押されてしまい，方向転換をして，上の解となったわけです。

2

問題のページへ

(1)　$0\leqq x\leqq 3$ において，$f(x)=-a^2x^2+4ax=-a^2\left(x-\dfrac{2}{a}\right)^2+4$ ……(＊)より，

(i)　$0<\dfrac{2}{a}\leqq 3\ \left(a\geqq\dfrac{2}{3}\right)$のとき

$f(x)$ は $x=\dfrac{2}{a}$ のとき，最大値 4 をとる。

(ii)　$\dfrac{2}{a}>3\ \left(0<a<\dfrac{2}{3}\right)$のとき

$f(x)$ は $x=3$ のとき，最大値 $-9a^2+12a$ をとる。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=3$ との共有点は, (＊)より,

$$-a^2\left(x-\frac{2}{a}\right)^2+4=3,\ \left(x-\frac{2}{a}\right)^2=\frac{1}{a^2}$$

よって，$x=\dfrac{2}{a}\pm\dfrac{1}{a}$ から，$x=\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{3}{a}$ となる。

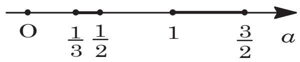
この共有点が線分 l : $y=3\ (2\leqq x\leqq 3)$ 上にある条件は,

(i)　$2\leqq\dfrac{1}{a}\leqq 3$ のとき　$\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$

(ii)　$2\leqq\dfrac{3}{a}\leqq 3$ のとき　$1\leqq a\leqq\dfrac{3}{2}$

(i)(ii)より，$\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$，$1\leqq a\leqq\dfrac{3}{2}$

数直線上に図示すると，右図の太線部となる。



［解 説］

(2)では，予測に反して，解が簡単な式となります。なお，最後の数直線上での図示は何を意味するのでしょうか。

3

問題のページへ

(1)　引き分けになるのは, A と B が同じ「手」を選んだときより, その確率は $\dfrac{3}{3^2}=\dfrac{1}{3}$,

またAがBに勝つことと, BがAに勝つことは対等なので, AがBに勝つ確率は,

$$\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

(2)　引き分けになるのは, A と B が同じ「手」を選んだときより, その確率は $\dfrac{4}{4^2}=\dfrac{1}{4}$,

またAがBに勝つことと, BがAに勝つことは対等なので, AがBに勝つ確率は,

$$\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{8}$$

(3)　まず,「はさみ」を「は」と記し, 引き分けを△, AがBに勝つことを○, AがBに負けることを×として表す。

すると,「石」「はさみ」「紙」「水」の勝敗規則を, A の勝敗として示すと, 右表の影をつけていない部分のようになる。

さて,「土」と「土」は引き分けになるので, A の勝つ確率が A の選ぶ「手」によらないようにするためには, つねに 2 勝 2 敗 1 分け, すなわち右表の薄く影をつけた「土」の行および列のように勝敗規則を定めるとよい。

B＼A	石	は	紙	水	土
石	△	×	○	○	×
は	○	△	×	○	×
紙	×	○	△	×	○
水	×	×	○	△	○
土	○	○	×	×	△

言い換えると,「土」は「紙」と「水」には勝つが「石」と「はさみ」には負ける, となる。

[解 説]

読解力がポイントのパズルのような問題です。